



CHAPITRE 3

Déterminants

Plan du chapitre

I Déterminant d'une matrice carrée.....	2
A - Généralités.....	2
B - Propriétés du déterminants.....	3
C - Multiplicativité du déterminant.....	3
D - Déterminant de la transposée.....	4
E - Développement par rapport à une ligne ou une colonne.....	4
II Déterminant d'une famille de vecteurs.....	5
III Déterminant d'un endomorphisme.....	6

Introduction

Historiquement, le déterminant « détermine » l'unicité de la solution d'un système d'équations linéaires. Les premières traces de cette notion apparaissent dans le livre *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique* écrit par des mathématiciens chinois aux alentours du II^e siècle avant notre ère. En Europe, les déterminants sont introduits par Cardan en 1545 pour la taille 2 dans son livre *Ars Magna*. Les premiers exemples en taille supérieure sont dus à Leibniz en 1693 qui étudie de nombreux systèmes d'équations linéaires à trois équations et trois inconnues. Cependant, Leibniz n'ayant pas publié ses travaux sur le déterminant, ils semblent avoir été oubliés avant que ses résultats soient redécouverts indépendamment une cinquantaine d'années plus tard.

En 1748, le traité posthume *Treatise of algebra* de Maclaurin relance la théorie des déterminants, avec l'écriture correcte de la solution d'un système de quatre équations et quatre inconnues. Les déterminants d'une taille arbitraire sont introduit par Cramer en 1750 pour énoncer les formules qui portent aujourd'hui son nom. En 1772, Laplace établit les formules de développement d'un déterminant, puis l'année suivante, Lagrange découvre le lien entre les déterminants et les volumes.

Le terme « déterminant » est employé pour la première fois par Gauss en 1801 dans son livre *Disquisitiones arithmeticae*, mais avec une signification différente de celle actuelle. Finalement, Cauchy utilisa le mot « déterminant » dans son sens moderne dans un traité publié en 1812, dans lequel il résume et simplifie les connaissances sur le sujet, en plus de donner une démonstration de la multiplicativité du déterminant. La théorie générale du déterminant est née avec lui.

Les déterminants sont des outils très utiles en mathématiques : ils permettent notamment de tester simplement si une matrice est inversible ou si une famille de vecteurs est une base. De plus, nous les utiliserons pour définir une notion importante dans un futur chapitre : le polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

L'objectif principal de ce chapitre est d'étendre la notion de déterminant vue en première année à des matrices de tailles quelconques. Nous généraliserons les propriétés déjà vues et nous en démontrerons de nouvelles afin de calculer efficacement le déterminant. Finalement, nous introduirons le déterminant d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Dans tout le chapitre, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on désigne par \mathbb{K} le corps \mathbb{R} ou le corps \mathbb{C} .

Partie I Déterminant d'une matrice carrée

I.A - Généralités

Théorème d'existence et d'unicité du déterminant : Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, appelée déterminant, vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes.
- (ii) L'échange de deux colonnes multiplie le déterminant par (-1) .
- (iii) Le déterminant de la matrice identité I_n est 1.

DÉMONSTRATION ADMISE

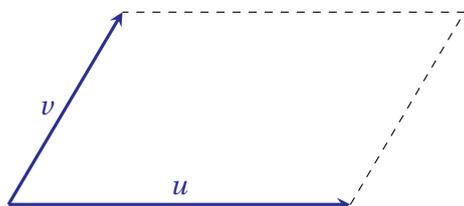
Remarque 1 : Lorsque $n = 2$ ou $n = 3$, on retrouve le déterminant vu en première année.

Notation : Le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté

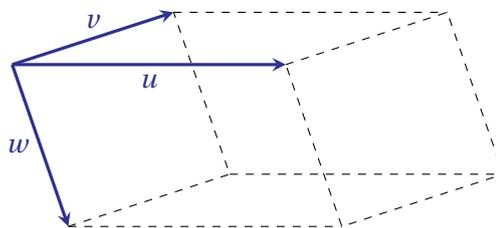
$$\det(A) = \det \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Remarques 2 :

- a) Si $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice dont on note les colonnes (u, v) est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur u et v .
- b) Si $n = 3$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice dont on note les colonnes (u, v, w) est le volume algébrique du parallélépipède construit sur u, v et w .



Parallélogramme construit
sur u et v



Parallélépipède construit
sur u, v et w

I.B - Propriétés du déterminants

Proposition 1 : On a les propriétés suivantes.

- (i) Si une matrice a une colonne nulle, alors son déterminant est nul.
- (ii) Si une matrice a deux colonnes égales, alors son déterminant est nul.

Théorème 1 : On a les propriétés suivantes.

- (i) On ne change pas le déterminant d'une matrice si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.
- (ii) Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Remarque 3 : On déduit du théorème précédent une méthode pour calculer le déterminant d'une matrice explicite. Il suffit d'appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour se ramener à une matrice triangulaire.

Exemple 1 : On calcule un déterminant en échelonnant la matrice sur les colonnes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \equiv \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \equiv \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + C_2 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \equiv \\ C_4 \leftarrow C_4 - \frac{2}{3}C_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1/3 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 3 \times \frac{1}{3} = 1.$$

Proposition 2 : Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

I.C - Multiplicativité du déterminant

Théorème 2 : Pour toute matrice $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

DÉMONSTRATION ADMISE

Corollaire 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, on a la relation $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Remarque 4 : Le déterminant d'une matrice carrée est nul si et seulement si la famille de ses colonnes est liée.

I.D - Déterminant de la transposée

Théorème 3 : Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(A) = \det(A^T)$.

DÉMONSTRATION ADMISE

Corollaire 2 : Les propriétés du déterminant sur les colonnes sont aussi valables sur les lignes.

I.E - Développement par rapport à une ligne ou une colonne

On suppose dans cette partie que $n \geq 2$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en retirant la i -ème ligne et la j -ème colonne à la matrice A .

Formules de Laplace : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Pour tout indice $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

(ii) Pour tout indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

DÉMONSTRATION (NON EXIGIBLE) :

On se limite à donner le cheminement de la démonstration. On définit l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

On montre que cette application vérifie les trois points du théorème d'existence et d'unicité du déterminant, donc on a l'égalité $\varphi = \det$, ce qui prouve la formule du premier point. La démonstration est analogue pour le second point. ■

Exemples 2 :

a) En développement par rapport à la première colonne, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - 2 \times 1 + 3 \times 3 = 5.$$

b) En développement par rapport à la deuxième ligne, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times 1 + 1 \times 3 - 2 \times (-2) = 5.$$

Remarque 5 : Le signe du $(-1)^{i+j}$ dans la formule peut se retenir avec la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & \pm \\ - & + & - & \ddots & \vdots \\ + & - & \ddots & \ddots & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & + & - \\ \pm & \cdots & + & - & + \end{pmatrix}$$

Partie II Déterminant d'une famille de vecteurs

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel E sur \mathbb{K} de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition (Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base) : Soit \mathcal{B} une base de E . Le déterminant dans la base \mathcal{B} d'une famille de vecteurs (v_1, \dots, v_n) de E , noté $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$, est le déterminant de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 3 : On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$, la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de E et la famille (P_0, P_1, P_2) avec

$$P_0 = X^2 + 1, \quad P_1 = X^2 + X + 1, \quad P_2 = X^2 - 1.$$

La matrice de cette famille dans la base \mathcal{B} est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P_0, P_1, P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le déterminant de cette famille dans la base \mathcal{B} est

$$\det_{\mathcal{B}}(P_0, P_1, P_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Théorème 4 : Soit \mathcal{B} une base de E . Une famille (v_1, \dots, v_n) de vecteurs de E est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

Exemple 4 : La famille (P_0, P_1, P_2) de l'exemple précédent est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Partie III Déterminant d'un endomorphisme

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel E sur \mathbb{K} de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Rappelons que deux matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$.

Lemme 1 : Si deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors elles ont le même déterminant.

Définition (Déterminant d'un endomorphisme) : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Le déterminant de f , notée $\det(f)$, est le déterminant de la matrice représentant f dans une base \mathcal{B} de E .

Remarque 6 : D'après le lemme précédent, le nombre $\det(f)$ ne dépend pas de la base \mathcal{B} que l'on utilise pour faire le calcul. En effet, si \mathcal{B}' est une autre base de E , on a avec la formule du changement de base

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times (P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}})^{-1},$$

donc les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ sont semblables, donc elles ont le même déterminant.

Exemple 5 : On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = XP''(X) + P(X)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, la matrice de f est

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le déterminant de f est $\det(f) = \det(A) = 1 \times 1 \times 1 = 1$.

Théorème 5 : Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

- (i) On a $\det(\text{Id}_E) = 1$.
- (ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\det(\lambda f) = \lambda^{\dim(E)} \det(f)$.
- (iii) On a $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.
- (iv) L'application f est un automorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas, on a $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.