TD 17 Courbes et surfaces dans l'espace

Dans tous les exercices, on considère un espace affine $\mathscr{E}$ euclidien orienté de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

Partie I Révisions - Géométrie dans l'espace

Exercice 1 : Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique de chacun des plans suivants.

(i) Le plan $(\mathscr{P}_1)$ passant par $A(1,0,1)$ et dirigée par $\vec{u}(2,1,0)$ et $\vec{v}(1,1,1)$.
(ii) La plan $(\mathscr{P}_2)$ passant par $A(1,1,1), B(2,-1,1)$ et $C(-1,-1,2)$.
(iii) Le plan $(\mathscr{P}_3)$ passant par $A(2,1,1)$ dont un vecteur normal est $\vec{n}(-2,3,-1)$.

Exercice 2 : On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+3y+2z+1=0$.

1. Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant le point $A(1,1,1)$.
2. Calculer la distance du point $A(1,1,1)$ au plan $\mathscr{P}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 3 : On considère les points $A(1,0,1)$ et $B(-1,1,2)$ de l'espace.

1. Déterminer une représentation paramétrique et une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et dirigé par le vecteur $\vec{u}(1,2,3)$.
2. Calculer la distance du point B à la droite $\mathscr{D}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{D}$.

Exercice 4 : On considère le point $A(1,0,-1)$ et les vecteurs $\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(4,5,6)$. On note $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation cartésienne $x-y+z=1$.

1. Déterminer une représentation paramétrique et une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{D}=\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$.
3. Calculer la distance de A à $\mathscr{D}$ et le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$.

Exercice 5 : Déterminer une équation cartésienne de la droite de l'espace passant par le point $A(2,3,1)$, parallèle au plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x-5y+4z=1$ et coupant la droite Δ d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y+1 & = & 0 \\ z-1 & = & 0. \end{array}\right.$$

Exercice 6 : On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+y+z=1$ et pour tout $m\in\mathbb{R}$, on note $\mathscr{P}_m$ le plan d'équation $mx-y+(2-m)z=4-m$.

1. Montrer qu'il existe une droite $\mathscr{D}$ telle que $\mathscr{D}\subset\mathscr{P}_m$ pour tout $m\in\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe un point A tel que $A\in\mathscr{P}\cap\mathscr{P}_m$ pour tout $m\in\mathbb{R}$.

Exercice 7 : On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x+y+3z+1=0$ et l'ensemble $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne $x^2-4x+y^2+2y+z^2=11$.

1. Déterminer la nature géométrique de $\mathscr{S}$.
2. Déterminer la nature de l'intersection entre $\mathscr{S}$ et le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 8 : Soit $m\in\mathbb{R}$. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+y+z=4$ et l'ensemble $\mathscr{S}_m$ d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-4x+2y=m$.

1. Déterminer la nature géométrique de $\mathscr{S}_m$ en fonction du paramètre m.
2. Déterminer la nature de $\mathscr{S}_m\cap\mathscr{P}$ en fonction du paramètre m.

Exercice 9 : Déterminer l'intersection entre la sphère de centre $\Omega_1(1,0,1)$ et de rayon 3 avec la sphère de centre $\Omega_2(0,0,1)$ et de rayon 2.

Partie II Courbes paramétrées de l'espace

Exercice 10 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{1+\cos(t)}{2} \\ y(t) &= \dfrac{\sin(t)}{2} \\ z(t) &= t. \end{cases}$$

1. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Donner une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(0)$.
3. Déterminer les projections orthogonales de $\mathscr{C}$ sur les plans (xOy) et (xOz).

Exercice 11 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= t^2 \\ z(t) &= t^3+1. \end{cases}$$

1. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer les tangentes à $\mathscr{C}$ parallèles au plan d'équation $4x+6y+3z=0$.

Exercice 12 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) &= t^2-1 \\ y(t) &= 2t \\ z(t) &= t^2+t+1. \end{cases}$$

1. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Donner en ces points une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$.
3. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est plane.
4. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est une parabole.

Partie III Surfaces paramétrées de l'espace

Exercice 13 : On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(u,v) &= u^2+uv+v^2 \\ y(u,v) &= u+v \\ z(u,v) &= u^3+v^3. \end{cases}$$

1. Déterminer les points réguliers de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $M(1,-1)$.

Exercice 14 : On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(u,v) &= \dfrac{\cos(u)}{\mathrm{ch}(v)} \\ y(u,v) &= \dfrac{\sin(u)}{\mathrm{ch}(v)} \\ z(u,v) &= \dfrac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)}. \end{cases}$$

1. Déterminer les points réguliers de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Exercice 15 : On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(u,v) &= u+v \\ y(u,v) &= 4uv \\ z(u,v) &= u^2+v^2. \end{cases}$$

1. Montrer que l'ensemble des points stationnaires de $\mathscr{S}$ est une courbe plane dont on précisera la nature.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $M(1,0)$.
3. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Partie IV Surfaces définies par une équation cartésienne

Exercice 16 - Cône : Soit $\mathscr{S}$ la surface de l'espace d'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Donner en ces points une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$.

Exercice 17 : Soit $\mathscr{S}$ la surface de l'espace d'équation

$$3x^2 + 4xy + 2yz + 4xz = 0.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Donner en ces points une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$.

Exercice 18 - Tore : Soit $\mathscr{S}$ la surface de l'espace d'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Donner une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $(3, 0, 0)$.

Exercice 19 : Déterminer les plans tangents à la surface $\mathscr{S}$ d'équation $x = 8yz$ contenant la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ x + 4z + 2 & = & 0. \end{array}\right.$$

Exercice 20 : Soit $\mathscr{S}$ la surface de l'espace d'équation $z^3 = xy$.

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Déterminer les plans tangents à $\mathscr{S}$ contenant la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 2 & = & 0 \\ y - 3z - 3 & = & 0. \end{array}\right.$$

Partie V Courbes définies par une équation cartésienne

Exercice 21 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + z^2 & = & 1 \\ x + z & = & 1. \end{array}\right.$$

1. Quelle est la nature géométrique de la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathscr{C}$.
3. Donner en ces points une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$.
4. Déterminer la projection orthogonale de $\mathscr{C}$ sur le plan (xOy).

Exercice 22 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 1 \\ x^2 + z^2 & = & 1. \end{array}\right.$$

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est la réunion de deux courbes planes.
2. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathscr{C}$.
3. Donner en ces points une représentation paramétrique de la tangente à $\mathscr{C}$.
4. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
5. Déterminer la projection de $\mathscr{C}$ sur le plan (xOz).

Exercice 23 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 + z^2 & = & 1 \\ x^2 + y^2 & = & 1. \end{array}\right.$$

1. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer les projections orthogonales sur les trois plans de coordonnées de la courbe $\mathscr{C}$.

Partie VI Surfaces réglées

Exercice 24 : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la droite $\mathscr{D}_t$ de l'espace passant par le point $A_t(t,t,t^2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}_t(0,2,t)$. On note $\mathscr{S}$ la surface réglée engendrée par la famille $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

1. Déterminer une paramétrisation de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$.

Exercice 25 - Cylindre : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl}(x-2)^2+4y^2 & = & 1\\ z & = & 0.\end{array}\right.$$

Pour tout $A \in \mathscr{C}$, on considère la droite $\mathscr{D}_A$ passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1,2,3)$. On note $\mathscr{S}$ la surface réglée engendrée par $(\mathscr{D}_A)_{A\in\mathscr{C}}$.

1. Déterminer une paramétrisation de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$.

Exercice 26 - Cylindre : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl}x^2+2y^2-z & = & 0\\ x+y+z & = & 0.\end{array}\right.$$

Pour tout $A \in \mathscr{C}$, on considère la droite $\mathscr{D}_A$ passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1,1,-1)$. On note $\mathscr{S}$ la surface réglée engendrée par $(\mathscr{D}_A)_{A\in\mathscr{C}}$.

1. Déterminer une paramétrisation de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$.

Exercice 27 : Soit $\mathscr{S}$ la surface de l'espace d'équation $(x+z)^2+2y^2=2$.

1. Soit $M_0 \in \mathscr{S}$. Déterminer les droites tracées sur $\mathscr{S}$ passant par M_0.
2. La surface $\mathscr{S}$ est-elle réglée ?

Exercice 28 : Soit $\mathscr{S}$ la surface de l'espace d'équation $x^2-y^2=2z^3$.

1. Soit $M_0 \in \mathscr{S}$. Déterminer les droites tracées sur $\mathscr{S}$ passant par M_0.
2. La surface $\mathscr{S}$ est-elle réglée ?

Exercice 29 : Montrer que la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z = x^3-3xy$ est réglée.

Exercice 30 : On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{rcl}x(u,v) & = & uv\\ y(u,v) & = & u\\ z(u,v) & = & v^2.\end{array}\right.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Donner en ces points une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$.
3. Montrer que la surface $\mathscr{S}$ est réglée.
4. Déterminer une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$.

Exercice 31 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{rcl}x(t) & = & t\\ y(t) & = & t^2\\ z(t) & = & t^3.\end{array}\right.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathscr{T}_t$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point $M(t)$. On désigne par $\mathscr{S}$ la réunion des droites $\mathscr{T}_t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une paramétrisation de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer les points stationnaires de $\mathscr{S}$ pour le paramétrage obtenu, puis déterminer une équation du plan tangent à la surface aux points réguliers.
3. Montrer que tous les points réguliers d'une même génératrice $\mathscr{T}_t$ ont le même plan tangent.

Exercice 32 : Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}^*)^3$. On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & at \\ y(t) & = & bt^3 \\ z(t) & = & c(t^2+1). \end{array}\right.$$

Soit $\mathscr{S}$ la surface engendrée par les droites parallèles au plan (xOy) et qui rencontre $\mathscr{C}$ en deux points.

1. Déterminer une paramétrisation de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer l'ensemble des points de $\mathscr{S}$ pour lesquels le plan tangent passe par le point O.

Exercice 33 - Hyperboloïde à une nappe : Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}^*)^3$. On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1.$$

1. On considère le point $A_\theta(a\cos(\theta), b\sin(\theta), 0)$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. Montrer qu'il existe exactement deux droites tracées sur $\mathscr{S}$ passant par A_θ.
2. Montrer que si $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$ vérifie $x^2+y^2 = u^2+v^2$, alors

$$\exists \theta \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & u\cos(\theta) - v\sin(\theta) \\ y & = & u\sin(\theta) + v\cos(\theta). \end{array}\right.$$

3. En déduire deux familles de droites engendrant $\mathscr{S}$, puis montrer que toute droite incluse dans $\mathscr{S}$ est dans l'une des deux familles précédentes.

Partie VII Surfaces de révolution

Exercice 34 : On considère la droite Δ de l'espace d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z. \end{array}\right.$$

Déterminer une équation cartésienne du cylindre de révolution $\mathscr{S}$ d'axe Δ et de rayon 1.

Exercice 35 : On considère la droite Δ de l'espace d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & z+2 \\ y & = & z+1. \end{array}\right.$$

Déterminer une équation cartésienne du cylindre de révolution $\mathscr{S}$ d'axe Δ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 36 : Soit $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. Déterminer une équation cartésienne du cône de révolution $\mathscr{S}$ de sommet O, d'axe (Oz) et de demi-angle au sommet θ.

Exercice 37 : On considère la surface de révolution $\mathscr{S}$ obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos^2(t) \\ y(t) & = & \sin(t) \\ z(t) & = & \cos(2t). \end{array}\right.$$

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est une courbe plane.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.
3. Que peut-on dire des méridiennes de cette surface ?

Exercice 38 : On considère la surface de révolution $\mathscr{S}$ obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 2 & = & 0 \\ x + z & = & 1. \end{cases}$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Exercice 39 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la surface de révolution $\mathscr{S}$ obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$\begin{cases} x & = & \lambda \\ y & = & 3z^2 + \lambda^2. \end{cases}$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Exercice 40 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace d'équation

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = \lambda^2 \left(x^2 - y^2 - z^2\right).$$

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est une surface de révolution dont on précisera l'axe.
2. Tracer une méridienne de la surface $\mathscr{S}$.

Exercice 41 : On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1.$$

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est une surface de révolution dont on précisera l'axe.
2. Tracer une méridienne de la surface $\mathscr{S}$.