Mathématiques

PT

Lycée Couffignal

CHAPITRE 17

Courbes et surfaces dans l'espace

Plan du chapitre

Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié les courbes du plan définies avec une représentation paramétrique ou avec une équation cartésienne. Dans ce nouveau chapitre, nous allons adapter ces notions pour étudier les courbes et les surfaces de l'espace.

Nous savons que tout plan $\mathscr{P}$ de l'espace peut être défini par une représentation paramétrique de la forme

$$M(x,y,z)\in\mathscr{P} \quad\Leftrightarrow\quad \exists(u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_0+ua_1+va_2\\ y &=& y_0+ub_1+vb_2\\ z &=& z_0+uc_1+vc_2\end{array}\right.$$

où les vecteurs $(a_1,b_1,c_1)\in\mathbb{R}^3$ et $(a_2,b_2,c_2)\in\mathbb{R}^3$ sont non colinéaires et $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$. D'autre part, nous pouvons également décrire le plan $\mathscr{P}$ avec une équation cartésienne de la forme

$$M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad\Leftrightarrow\quad ax+by+cz+d=0.$$

où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ est un vecteur non nul et $d\in\mathbb{R}$. On peut également décrire d'autres surfaces avec les deux procédés précédents. Par exemple, la surface $\mathscr{S}$ définie par la représentation paramétrique

$$M(x,y,z)\in\mathscr{S} \quad\Leftrightarrow\quad \exists(u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \cos(u)\\ y &=& \sin(u)\\ z &=& v\end{array}\right.$$

est un cylindre. Ce dernier peut également se définir par l'équation cartésienne

$$M(x,y,z)\in\mathscr{S} \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=1.$$

Nous savons également que toute droite $\mathscr{D}$ de l'espace peut être définie par une représentation paramétrique de la forme

$$M(x,y,z)\in\mathscr{D} \quad\Leftrightarrow\quad \exists t\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_0+ta\\ y &=& y_0+tb\\ z &=& z_0+tc\end{array}\right.$$

où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ est un vecteur non nul et $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$. D'autre part, toute droite $\mathscr{D}$ de l'espace peut être vue comme l'intersection de deux plans, ce qui permet de la décrire avec un système d'équations cartésiennes

$$M(x,y,z)\in\mathscr{D} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} a_1x+b_1y+c_1z+d_1 &=& 0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2 &=& 0\end{array}\right.$$

où les vecteurs $(a_1,b_1,c_1)\in\mathbb{R}^3$ et $(a_2,b_2,c_2)\in\mathbb{R}^3$ sont non colinéaires et $(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2$. On peut également décrire d'autres courbes de l'espace avec les deux procédés précédents. Par exemple, la courbe $\mathscr{C}$ définie par la représentation paramétrique

$$M(x,y,z)\in\mathscr{C} \quad\Leftrightarrow\quad \exists t\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \cos(t)\\ y &=& \sin(t)\\ z &=& 0\end{array}\right.$$

est un cercle. Ce dernier peut également se définir comme l'intersection de deux surfaces (un cylindre et un plan), ce qui permet de le décrire avec

$$M(x,y,z)\in\mathscr{S} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& 1\\ z &=& 0.\end{array}\right.$$

Dans ce chapitre, nous allons étudier les courbes et les surfaces de l'espace définies par une représentation paramétrique ou par une équation cartésienne. Nous nous intéresserons en particulier à l'existence et à la détermination de la droite tangente à une courbe en un point et du plan tangent à une surface en un point.

Dans tout le chapitre, on considère un espace affine $\mathscr{E}$ euclidien orienté de dimension 3. On munit cet espace d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, ce qui permet de l'identifier à $\mathbb{R}^3$.

Partie I Courbes paramétrées de l'espace

Les notions vues pour une courbe plane paramétrée s'adaptent sans difficulté au cadre de l'espace.

I.A - Généralités

Définition (Courbe paramétrée de l'espace) : Une courbe paramétrée de l'espace est une fonction vectorielle f définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Remarques 1 :

a) On peut également définir une courbe paramétrée $f = (x, y, z)$ par ses fonctions coordonnées x, y et z.
b) Lorsque qu'il n'y a pas ambiguïté, on utilise souvent la notation $f : t \mapsto M(t)$.

Définition (Support d'une courbe paramétrée) : Le support d'une courbe paramétrée $f : I \to \mathbb{R}^3$ est l'ensemble

$$f(I) = \left\{ f(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in I \right\}.$$

Remarques 2 :

a) En notant le support $\mathscr{C} = f(I)$, on dit que la courbe $\mathscr{C}$ est paramétrée par la fonction f ou que f est une paramétrisation de la courbe $\mathscr{C}$.
b) D'un point de vue physique, une courbe paramétrée décrit le mouvement d'un objet dans le plan et le support représente la trajectoire de cet objet.

ATTENTION : Une courbe paramétrée ne se résume pas à son support. Le support est un objet géométrique, tandis que la courbe paramétrée f donne une information supplémentaire : elle indique la manière dont le support est parcouru.
On peut décrire le même objet géométrique de plusieurs manières. Par exemple, le cercle trigonométrique du plan (xOy) est paramétré par les fonctions vectorielles $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t), 0)$ et $g : t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t), 0)$.

I.B - Étude locale en un point régulier

Dans cette partie, on considère une courbe paramétrée par $f : I \to \mathbb{R}^3$ et un point $t_0 \in I$. On suppose qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall t \in I \cap]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\setminus \{t_0\}, \quad M(t) \neq M(t_0).$$

Autrement dit, la courbe paramétrée par la restriction de f au voisinage $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ passe en $M(t_0)$ uniquement lorsque $t = t_0$. Cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée en théorie, mais elle le sera en pratique. En particulier, on en déduit que la fonction

$$v : t \mapsto \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\left\| \overrightarrow{M(t_0)M(t)} \right\|}.$$

est définie sur l'intervalle $I \cap]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\setminus \{t_0\}$. Pour tout $t \in I \cap]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\setminus \{t_0\}$, l'élément $v(t)$ est un vecteur unitaire dirigeant la droite $(M(t_0)M(t))$.

Définition (Tangente à une courbe paramétrée) : Si la fonction v admet une limite $\vec{v}_g$ lorsque $t \to t_0^-$, une limite $\vec{v}_d$ lorsque $t \to t_0^+$ et si $\vec{v}_d = \pm \vec{v}_g$, alors on appelle tangente à la courbe en $M(t_0)$ la droite passant par le point $M(t_0)$ et dirigée par $\vec{v}_d$.

Remarque 3 : Intuitivement, la tangente en $f(t_0)$ est la limite de la sécante $(M(t_0)M(t))$ quand $t \to t_0$.

Définition (Point régulier) : On dit qu'un point $M(t_0)$ de la courbe paramétrée par f est régulier si le vecteur $f'(t_0)$ est non nul. Dans le cas contraire, on dit que le point $M(t_0)$ est stationnaire (ou singulier).

Exemple 1 : La courbe paramétrée par $f : t \mapsto (t^2, t^3, t^4)$ admet $M(0)$ comme unique point stationnaire.

Théorème (Existence de la tangente en un point régulier) : Si le point $M(t_0)$ est régulier, alors la courbe paramétrée admet une tangente en $M(t_0)$ dont un vecteur directeur est $f'(t_0)$.

Remarques 4 :

a) La tangente d'une courbe paramétrée en un point est un objet géométrique : elle ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe. En effet, si $\varphi : J \to I$ est une fonction bijective de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, alors les courbes paramétrées par $f : I \to \mathbb{R}^3$ et par $g = f \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^3$ ont le même support. De plus, si on note $s_0 = \varphi^{-1}(t_0)$, alors on a
$$g'(s_0) = \varphi'(s_0) f'(\varphi(s_0)) = \varphi'(s_0) f'(t_0),$$
donc les vecteurs $g'(s_0)$ et $f'(t_0)$ sont colinéaires.

b) Si $M(t_0)$ est un point régulier de la courbe paramétrée par f, on en déduit une représentation paramétrique de la tangente $\mathscr{T}$ en $M(t_0)$ avec les équivalences
$$A(x,y,z) \in \mathscr{T} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M(t_0)A} \in \mathrm{Vect}\big(f'(t_0)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& x(t_0) + t x'(t_0) \\ y &=& y(t_0) + t y'(t_0) \\ z &=& z(t_0) + t z'(t_0). \end{array}\right.$$

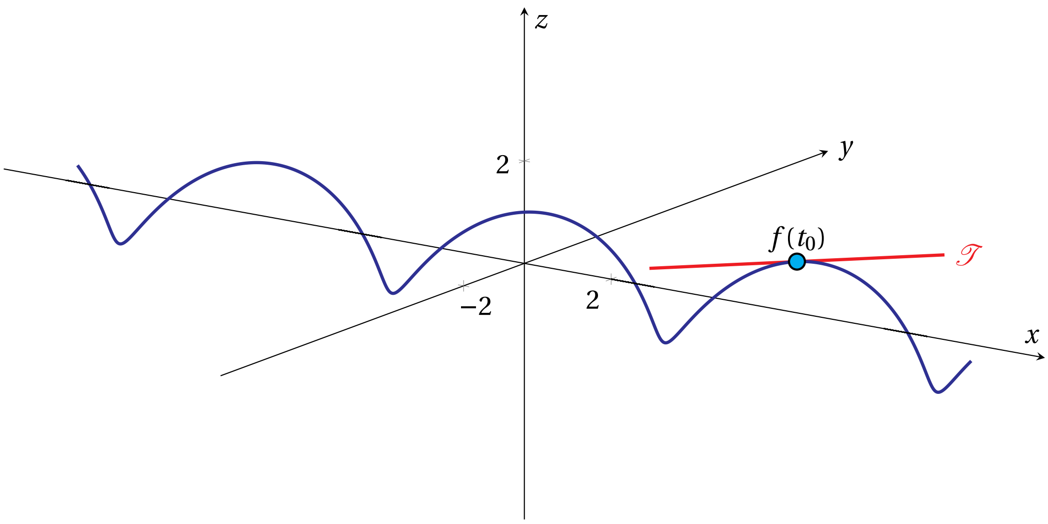
c) Si $M(t_0)$ est un point régulier de la courbe paramétrée par f, on en déduit une équation cartésienne de la tangente $\mathscr{T}$ en $M(t_0)$ avec les équivalences
$$A(x,y,z) \in \mathscr{T} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M(t_0)A} \in \big(f'(t_0)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M(t_0)A} \wedge f'(t_0) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
On en déduit un système de trois équations cartésiennes décrivant la droite $\mathscr{T}$. Ces trois équations sont toujours liées, ce qui permet d'en éliminer une.

Exemple 2 : On considère la courbe paramétrée $f : t \mapsto (t, \sin(t), \cos(t))$. On a
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = (1, \cos(t), -\sin(t)) \neq (0,0,0),$$
donc tous les points de cette courbe sont réguliers. On en déduit d'après le théorème précédent que la courbe admet une tangente $\mathscr{T}$ en $f(t_0)$ dirigé par le vecteur $f'(t_0)$, donc une représentation paramétrique de $\mathscr{T}$ est
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t_0 + t \\ y &=& \sin(t_0) + \cos(t_0)\, t \\ z &=& \cos(t_0) - \sin(t_0)\, t. \end{array}\right.$$
D'autre part, on peut déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{T}$ en écrivant
$$\begin{pmatrix} x - x(t_0) \\ y - y(t_0) \\ z - z(t_0) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x - t_0 \\ y - \sin(t_0) \\ z - \cos(t_0) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(t_0) \\ -\sin(t_0) \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
En calculant le produit vectoriel ci-dessus, on obtient le système d'équations cartésiennes
$$\left\{\begin{array}{rcl} \sin(t_0)\, y + \cos(t_0)\, z &=& 1 \\ \sin(t_0)\, x + z &=& t_0 \sin(t_0) + \cos(t_0) \\ \cos(t_0)\, x - y &=& t_0 \cos(t_0) - \sin(t_0). \end{array}\right.$$

Finalement, on peut éliminer la première équation avec l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \cos(t_0)L_2 + \sin(t_0)L_3$, donc une équation cartésienne de la tangente $\mathscr{T}$ est

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sin(t_0)x + z & = & t_0\sin(t_0) + \cos(t_0) \\ \cos(t_0)x - y & = & t_0\cos(t_0) - \sin(t_0). \end{array}\right.$$

On peut représenter la courbe paramétrée par f et sa tangente $\mathscr{T}$ en un point $f(t_0)$.



Définition (Courbe régulière) : La courbe paramétrée par f est dite régulière si tous ses points sont réguliers.

Remarques 5 :

a) Une courbe paramétrée régulière est orientable : l'application $\overrightarrow{T} : I \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall t \in I, \quad \overrightarrow{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

est une application continue telle que pour tout $t \in I$, le vecteur $\overrightarrow{T}(t)$ est unitaire et dirige la tangente à la courbe au point $M(t)$.

b) Si une courbe est orientable, alors l'orienter revient à choisir un sens de parcours parmi les deux possibles.

Exemple 3 : La courbe paramétrée par $f : t \mapsto (t, \exp(t), \sin(t))$ est régulière.

Partie II Surfaces paramétrées de l'espace

II.A - Généralités

Définition (Surface paramétrée de l'espace) : Une surface paramétrée de l'espace est une fonction vectorielle f définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Remarques 6 :

a) On peut également définir une courbe paramétrée $f = (x, y, z)$ par ses fonctions coordonnées x, y et z.

b) Lorsque qu'il n'y a pas ambiguïté, on utilise souvent la notation $f : (u, v) \mapsto M(u, v)$.

Définition (Support d'une surface paramétrée) : Le support d'une surface paramétrée $f : U \to \mathbb{R}^3$ est l'ensemble

$$f(U) = \left\{ f(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in U \right\}.$$

Remarque 7 : En notant le support $\mathscr{S} = f(U)$, on dit que la surface $\mathscr{S}$ est paramétrée par la fonction f ou que f est une paramétrisation de la surface $\mathscr{S}$.

ATTENTION : Une surface paramétrée ne se résume pas à son support. Le support est un objet géométrique, tandis que la surface paramétrée f donne une information supplémentaire : elle indique la manière dont le support est parcouru.

On peut décrire le même objet géométrique de plusieurs manières. Par exemple, les fonctions vectorielles

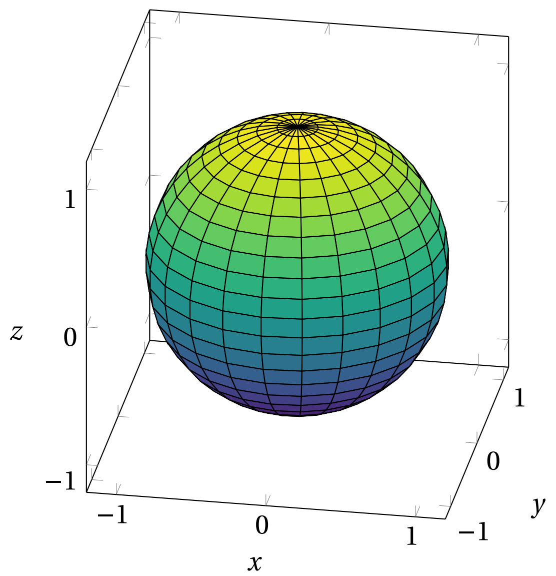
$$f : (u, v) \mapsto (\cos(u), \sin(u), v) \quad \text{et} \quad g : (u, v) \mapsto (\sin(u), \cos(u), v).$$

ont comme support le même cylindre.

Exemple 4 : On considère la surface paramétrée $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad f(u, v) = (\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), \sin(v)).$$

On peut représenter le support de la surface paramétrée f.



Définition (Courbes coordonnées) : Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée de l'espace.
On appelle courbe coordonnée de la surface paramétrée par f toutes courbes paramétrées par une fonction vectorielle de la forme $u \mapsto f(u, v_0)$ ou $v \mapsto f(u_0, v)$ avec $(u_0, v_0) \in U$.

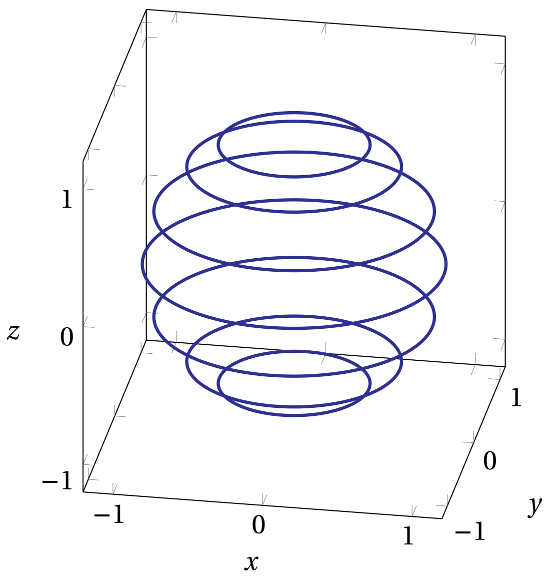
Remarques 8 :

a) Toutes les courbes coordonnées sont incluses dans la surface paramétrée.

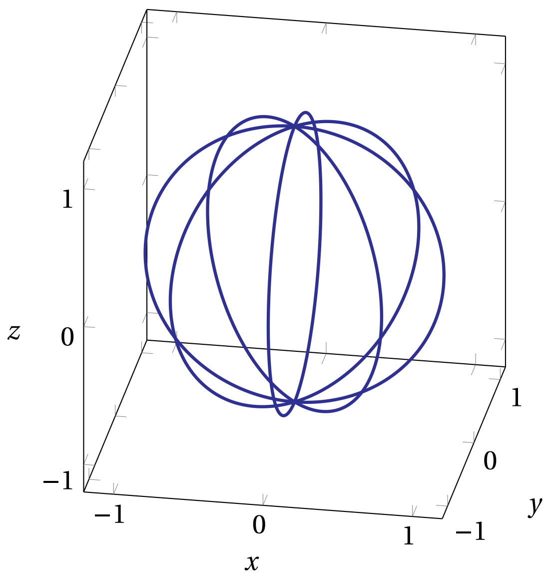
b) Ce sont les courbes utilisées par l'ordinateur pour tracer une surface paramétrée (voir l'exemple 4).

c) Plus généralement, si $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, alors la fonction vectorielle $t \mapsto f(u(t), v(t))$ est une courbe paramétrée de l'espace tracée sur la surface paramétrée par f.

Exemple 5 : Traçons quelques courbes coordonnées en reprenant la surface paramétrée de l'exemple 4.

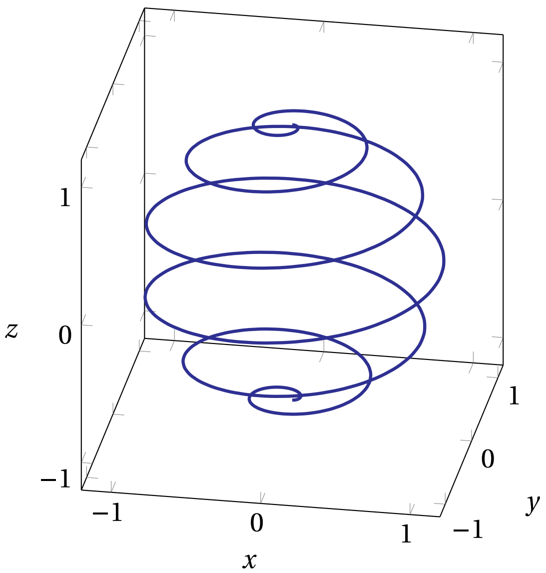


Quelques courbes coordonnées
de la forme $u \mapsto f(u, v_0)$



Quelques courbes coordonnées
de la forme $v \mapsto f(u_0, v)$

D'autre part, on peut la courbe paramétrée $t \mapsto f(12t, t)$ sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ en reprenant la surface paramétrée de l'exemple 4.



II.B - Étude locale en un point régulier

Dans cette sous-partie, on considère une surface paramétrée $f : U \to \mathbb{R}^3$ et un point $(u_0, v_0) \in U$.

On pourrait adopter une démarche similaire à celle utilisée pour déterminer la tangente d'une courbe paramétrée. Cependant, dans un soucis de simplification, nous allons définir directement le plan tangent à partir des dérivées partielles de f.

Définition (Point régulier) : On dit qu'un point $M(u_0, v_0)$ de la surface paramétrée est régulier si les vecteurs

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$$

ne sont pas colinéaires. Dans le cas contraire, on dit que le point $M(u_0, v_0)$ est stationnaire (ou singulier).

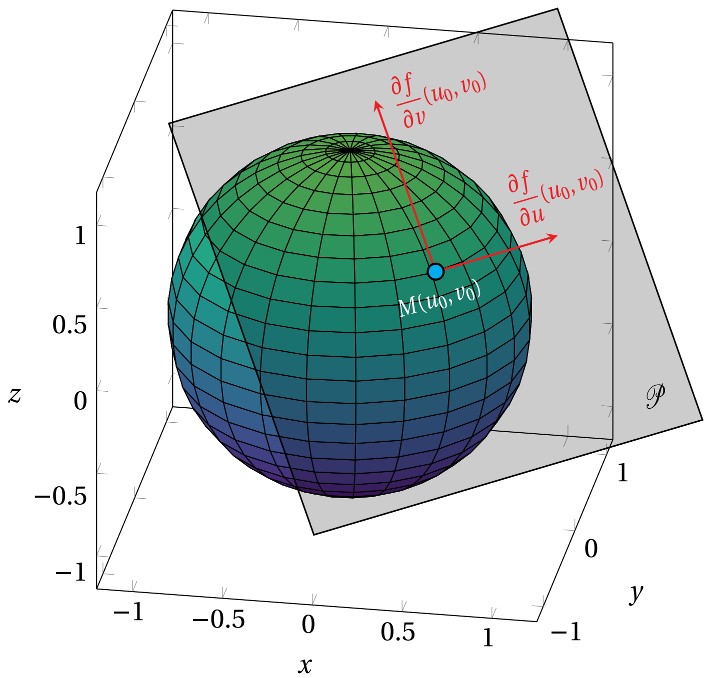
Exemple 6 : En reprenant l'exemple 4, on a pour tout $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} -\sin(u_0)\cos(v_0) \\ \cos(u_0)\cos(v_0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} -\cos(u_0)\sin(v_0) \\ -\sin(u_0)\sin(v_0) \\ \cos(v_0) \end{pmatrix}.$$

On en déduit qu'un point $M(u_0, v_0)$ de la surface paramétrée est régulier si et seulement si $\cos(v_0) \neq 0$.

Définition (Plan tangent en un point régulier) : On appelle plan tangent à la surface paramétrée en un point régulier $M(u_0, v_0)$ le plan passant par $M(u_0, v_0)$ et dirigé par les vecteurs $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$.

Illustration : Si $M(u_0, v_0)$ est un point régulier de la surface paramétrée par f et si on note $\mathscr{P}$ le plan tangent à la surface en $M(u_0, v_0)$, alors on peut représenter la situation avec le graphique ci-dessous.



Remarques 9 :

a) Si $M(u_0,v_0)$ est un point régulier de la surface paramétrée par f, on en déduit une représentation paramétrique du plan tangent $\mathscr{P}$ en $M(u_0,v_0)$ avec les équivalences

$$\begin{aligned}
A(x,y,z)\in\mathscr{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{M(u_0,v_0)A}\in\operatorname{Vect}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0),\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\right)\\
&\Leftrightarrow \exists(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl}
x &=& x(u_0,v_0)+u\dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+v\dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\\
y &=& y(u_0,v_0)+u\dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)+v\dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\\
z &=& z(u_0,v_0)+u\dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)+v\dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0).
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

b) Si $M(u_0,v_0)$ est un point régulier de la courbe paramétrée par f, on en déduit une équation cartésienne du plan tangent $\mathscr{P}$ en $M(u_0,v_0)$ avec les équivalences

$$\begin{aligned}
A(x,y,z)\in\mathscr{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{M(u_0,v_0)A}\in\operatorname{Vect}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0),\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\right)\\
&\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{M(u_0,v_0)A},\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0),\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\right)=0\\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix}
x-x(u_0,v_0) & \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\\
y-y(u_0,v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\\
z-z(u_0,v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)
\end{vmatrix}=0.
\end{aligned}$$

Exemple 7 : En reprenant l'exemple 4 et les calculs précédents, on a que $M\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est un point régulier de la surface. Par définition, le plan tangent $\mathscr{P}$ à la surface en $M\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ est dirigé par les vecteurs

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

On en déduit qu'une représentation paramétrique de $\mathscr{P}$ est

$$\left\{\begin{array}{rcl}
x &=& \dfrac{1}{2}-\dfrac{u}{2}-\dfrac{v}{2}\\
y &=& \dfrac{1}{2}+\dfrac{u}{2}-\dfrac{v}{2}\\
z &=& \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}v.
\end{array}\right.$$

D'autre part, une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est

$$\begin{vmatrix}
x-1/2 & -1/2 & -1/2\\
y-1/2 & 1/2 & -1/2\\
z-\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2
\end{vmatrix}=0\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+2z=2\sqrt{2}.$$

Remarque 10 : Le plan tangent en un point régulier est la réunion des tangentes aux courbes régulières tracées sur la surface passant par ce point. En effet, si $\gamma : t \mapsto f(u(t), v(t))$ est une courbe paramétrée régulière tracée sur la surface et passant par le point régulier $M(u_0, v_0)$ lorsque $t = t_0$, alors la tangente à la courbe en $M(u_0, v_0)$ est incluse dans le plan tangent à la surface en $M(u_0, v_0)$. En effet, il suffit d'appliquer la règle de la chaine pour obtenir

$$\gamma'(t_0) = u'(t_0)\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + v'(t_0)\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0).$$

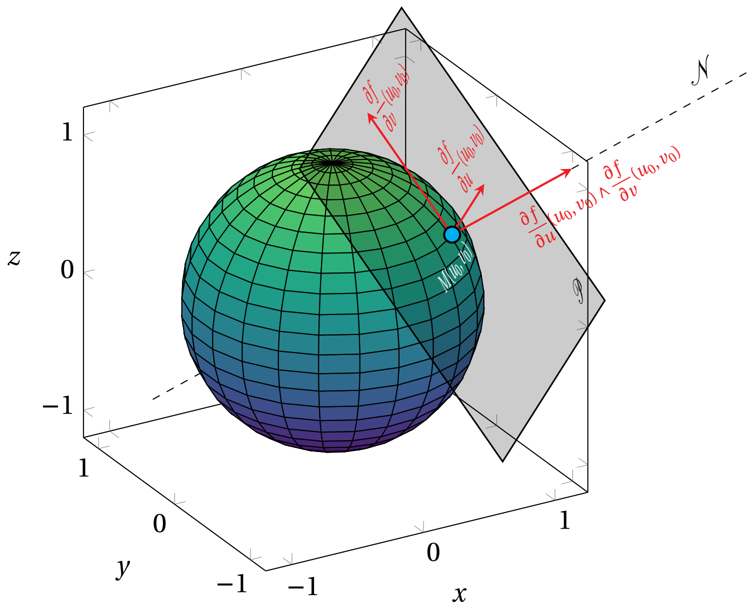
Définition (Vecteur normal) : On appelle vecteur normal à la surface paramétrée en un point régulier $M(u_0, v_0)$ tout vecteur normal au plan tangent à la surface en $M(u_0, v_0)$.

Définition (Droite normale) : La droite normale à la surface paramétrée en un point régulier $M(u_0, v_0)$ est la droite passant par $M(u_0, v_0)$ et orthogonale au plan tangent.

Remarque 11 : La droite normale en un point régulier $M(u_0, v_0)$ de la surface paramétrée par f est dirigé par le vecteur normal

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Illustration : Si $M(u_0, v_0)$ est un point régulier de la surface paramétrée par f, si on note $\mathscr{P}$ le plan tangent à la surface en $M(u_0, v_0)$ et $\mathscr{N}$ la droite normale à la surface en $M(u_0, v_0)$, alors on peut représenter la situation avec le graphique ci-dessous.



Exemple 8 : En reprenant l'exemple précédent, on en déduit que pour tout $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ avec $\cos(v_0) \neq 0$, la droite normale à la surface paramétrée par f au point $f(u_0, v_0)$ est dirigé par

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} -\sin(u_0)\cos(v_0) \\ \cos(u_0)\cos(v_0) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos(u_0)\sin(v_0) \\ -\sin(u_0)\sin(v_0) \\ \cos(v_0) \end{pmatrix} = \cos(v_0)\begin{pmatrix} \cos(u_0)\cos(v_0) \\ \sin(u_0)\cos(v_0) \\ \sin(v_0) \end{pmatrix}.$$

Une représentation paramétrique de la droite normale au point $f(u_0, v_0)$ est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \cos(u_0)\cos(v_0) + \cos(u_0)\cos(v_0)t \\ y & = & \sin(u_0)\cos(v_0) + \sin(u_0)\cos(v_0)t \\ z & = & \sin(v_0) + \sin(v_0)t. \end{array}\right.$$

Partie III Surfaces de l'espace définies par une équation cartésienne

Dans cette partie, on considère une application $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$.

III.A - Généralités

Définition (Surface implicite de l'espace) : La surface implicite de l'espace d'équation $g(x, y, z) = 0$ est l'ensemble des points $(x, y, z) \in U$ vérifiant $g(x, y, z) = 0$.

Exemples 9 :

a) Si $\mathscr{S}$ est la surface représentative d'une application $h : O \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors $\mathscr{S}$ est la surface d'équation $z - h(x, y) = 0$.

b) La sphère de centre $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et de rayon $R > 0$ est la surface d'équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0.$$

Remarques 12 :

a) Cette définition est un peu trop générale, mais elle a le mérite d'être simple et on s'en contentera à notre niveau. Par exemple, si on considère la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2$, alors la surface implicite d'équation $g(x, y, z) = 0$ est une droite, ce qui n'est pas très satisfaisant pour une surface.

b) Une surface peut être décrite par différentes équations cartésiennes. Par exemple le plan d'équation $x + z = 0$ admet aussi $(x + z)^2 = 0$ comme équation cartésienne.

III.B - Étude locale en un point régulier

Définition (Point régulier) : Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $g(x, y, z) = 0$. Un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ est régulier si

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0).$$

Dans le cas contraire, on dit que le point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ est singulier.

Remarques 13 :

a) On admet que l'on peut démontrer, à l'aide du théorème des fonctions implicites (hors-programme), que si $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ est un point régulier de la surface, alors $\mathscr{S}$ est le support d'une surface paramétrée au voisinage du point (x_0, y_0, z_0). Plus précisément, il existe un voisinage ouvert $\tilde{U} \subset U$ de (x_0, y_0, z_0) et une surface paramétrée régulière $f : O \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in \tilde{U}, \quad \big((x, y, z) \in \mathscr{S} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (u, v) \in O, \quad (x, y, z) = f(u, v) \big).$$

D'après les parties précédentes, on en déduit que la surface $\mathscr{S}$ admet un plan tangent au point (x_0, y_0, z_0).

b) On peut également démontrer la réciproque (hors-programme) : si $f(u_0, v_0)$ est un point régulier d'une surface paramétrée par $f : O \to \mathbb{R}^3$, alors on peut localement la décrire avec une équation cartésienne. Plus précisément, il existe un voisinage ouvert $\tilde{O} \subset O$ de (u_0, v_0), un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ de $f(u_0, v_0)$ et une fonction $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad \big(\exists (u, v) \in \tilde{O}, \quad (x, y, z) = f(u, v) \quad \Leftrightarrow \quad g(x, y, z) = 0 \big).$$

c) En pratique, on sait passer d'un point de vue à l'autre dans certains cas particuliers (plans, sphères,...), mais c'est un problème difficile dans le cas général.

Théorème (Plan tangent en un point régulier) : Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $g(x,y,z)=0$.
Si $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{S}$ est un point régulier de la surface $\mathscr{S}$, alors la surface $\mathscr{S}$ admet un plan tangent en (x_0,y_0,z_0) dont un vecteur normal est $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$.

Remarque 14 : Si le point $M(x_0,y_0,z_0)$ est un point régulier de la surface d'équation $g(x,y,z)=0$, on en déduit une équation cartésienne du plan tangent $\mathscr{P}$ en (x_0,y_0,z_0) avec les équivalences

$$\begin{aligned}
A(x,y,z)\in\mathscr{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{MA} \mid \nabla g(x_0,y_0,z_0)\right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + (z-z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0.
\end{aligned}$$

Exemple 10 : On considère la fonction $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par $g:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2-1$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et on a

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \quad \nabla g(x,y,z) = (2x,2y,2z).$$

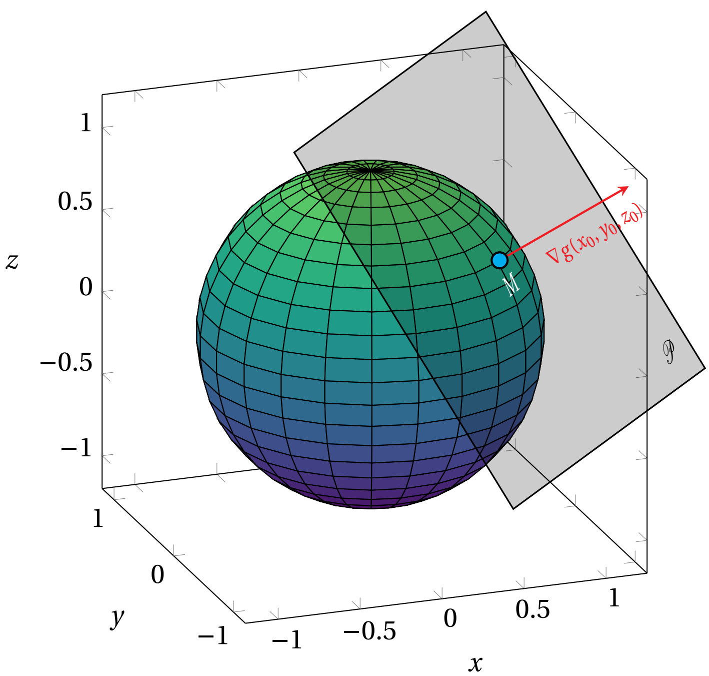
En particulier, on obtient que tous les points de la surface $\mathscr{S}$ d'équation $g(x,y,z)=0$ sont réguliers. On en déduit que $\mathscr{S}$ admet un plan tangent $\mathscr{P}$ en tout point $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{S}$ dont un vecteur normal $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$. Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est

$$\left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \middle| \nabla g(x_0,y_0,z_0) \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0x+y_0y+z_0z = x_0^2+y_0^2+z_0^2.$$

Comme $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{S}$, on en déduit que $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$, donc l'équation précédente se simplifie en

$$x_0x+y_0y+z_0z=1.$$

On peut représenter la surface et son plan tangent $\mathscr{P}$ au point $M(x_0,y_0,z_0)$ sur la figure ci-dessous.



III.C - Surfaces de niveau

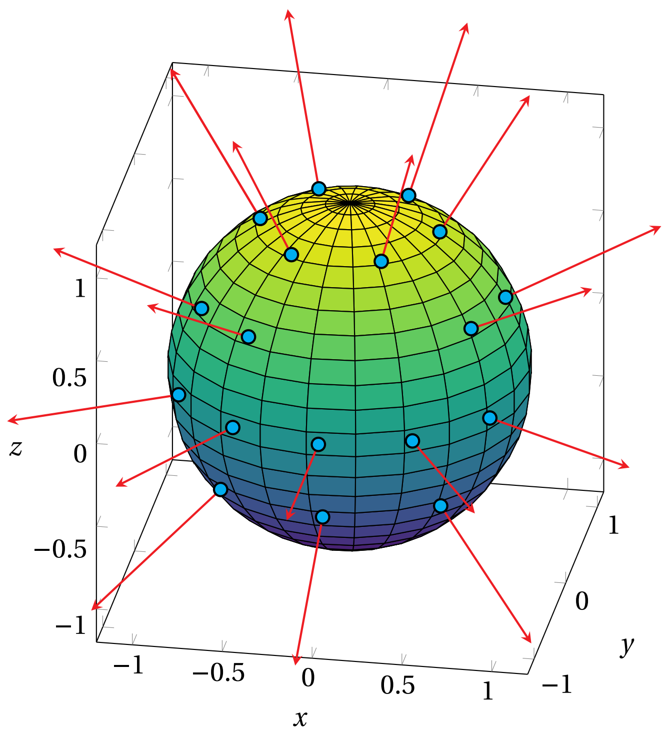
Définition (Surface de niveau) : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points $(x, y, z) \in U$ vérifiant la relation $g(x, y, z) = \lambda$ est appelé surface de niveau λ de l'application g.

Exemple 11 : La surface de niveau $\lambda \in \mathbb{R}$ de l'application $g : (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2$ est

- l'ensemble vide si $\lambda < 0$;
- l'origine si $\lambda = 0$;
- la sphère de centre l'origine et de rayon $\sqrt{\lambda}$ si $\lambda > 0$.

Proposition 1 : Le gradient de g est orthogonal aux surfaces de niveau de g et il est orienté dans le sens des valeurs croissantes de g.

Exemple 12 : On peut tracer la surface de niveau 1 de la fonction $g : (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2$ et placer quelques vecteurs gradients dessus.



Partie IV Courbes de l'espace définies par un système d'équations cartésiennes

Dans cette partie, on considère des applications $g_1 : U \to \mathbb{R}$ et $g_2 : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$.

IV.A - Généralités

Définition (Courbe implicite de l'espace) : La courbe implicite de l'espace d'équation $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$ est l'ensemble des points $(x, y, z) \in U$ vérifiant $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$.

Remarques 15 :

a) D'un point de vue géométrique, la courbe d'équation $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$ est l'intersection de la surface d'équation $g_1(x, y, z) = 0$ avec la surface d'équation $g_2(x, y, z) = 0$.

b) Cette définition est un peu trop générale, mais elle a le mérite d'être simple et on s'en contentera à notre niveau. Par exemple, l'intersection de deux sphères dans l'espace peut être une sphère, un cercle, un point ou l'ensemble vide.

Exemple 13 : Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(0, 0, 1)$ de rayon 1 dans le plan d'équation $z = 1$ est l'intersection de la sphère de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ avec le plan d'équation $z = 1$, donc une équation de $\mathscr{C}$ est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + z^2 & = & 2 \\ z & = & 1. \end{array} \right.$$

IV.B - Étude locale en un point régulier

Définition (Point régulier) : Soit $\mathscr{C}$ la courbe de l'espace d'équation $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$.
On dit qu'un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{C}$ est régulier si les vecteurs $\nabla g_1(x_0, y_0, z_0)$ et $\nabla g_2(x_0, y_0, z_0)$ ne sont pas colinéaires. Dans le cas contraire, on dit que le point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{C}$ est singulier.

Remarques 16 :

a) On admet que l'on peut démontrer, à l'aide du théorème des fonctions implicites (hors-programme), que si $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{C}$ est un point régulier de la courbe, alors $\mathscr{C}$ est le support d'une courbe paramétrée au voisinage du point (x_0, y_0, z_0). Plus précisément, il existe un voisinage ouvert $\tilde{U} \subset U$ de (x_0, y_0, z_0) et une courbe paramétrée régulière $f : I \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in \tilde{U}, \quad \big((x, y, z) \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in I, \quad (x, y, z) = f(t) \big).$$

D'après les parties précédentes, on en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente au point (x_0, y_0, z_0).

b) On peut également démontrer la réciproque (hors-programme) : si $f(t_0)$ est un point régulier d'une courbe paramétrée par $f : I \to \mathbb{R}^3$, alors on peut localement la décrire avec un système de deux équations cartésiennes. Plus précisément, il existe un voisinage ouvert $\tilde{I} \subset I$ de t_0, un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ de $f(t_0)$ et deux fonctions $g_1 : U \to \mathbb{R}$ et $g_2 : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad \big(\exists t \in \tilde{I}, \quad (x, y, z) = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0 \big).$$

c) En pratique, on sait passer d'un point de vue à l'autre dans certains cas particuliers (droites, cercles,...), mais c'est un problème difficile dans le cas général.

Théorème (Tangente en un point régulier) : Soit $\mathscr{C}$ la courbe de l'espace d'équation $g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$. En tout point régulier $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{C}$, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente qui est l'intersection du plan tangent de la surface d'équation $g_1(x,y,z) = 0$ et du plan tangent de la surface d'équation $g_2(x,y,z) = 0$.

Remarques 17 :

a) La régularité du point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{C}$ assure que les deux plans considérés ne sont pas parallèles, donc leur intersection est bien une droite.

b) Si le point $M(x_0, y_0, z_0)$ est un point régulier de la courbe d'équation $g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$, on en déduit une équation cartésienne de la tangente $\mathscr{T}$ en (x_0, y_0, z_0) avec les équivalences

$$\begin{aligned} A(x,y,z) \in \mathscr{T} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \left\langle \overrightarrow{MA} \mid \nabla g_1(x_0,y_0,z_0) \right\rangle & = & 0 \\ \left\langle \overrightarrow{MA} \mid \nabla g_2(x_0,y_0,z_0) \right\rangle & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (x-x_0)\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0)\dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + (z-z_0)\dfrac{\partial g_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) & = & 0 \\ (x-x_0)\dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0)\dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + (z-z_0)\dfrac{\partial g_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) & = & 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

c) En particulier, la tangente en un point régulier de la courbe $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{C}$ est dirigée par le vecteur

$$\nabla g_1(x_0,y_0,z_0) \wedge \nabla g_2(x_0,y_0,z_0).$$

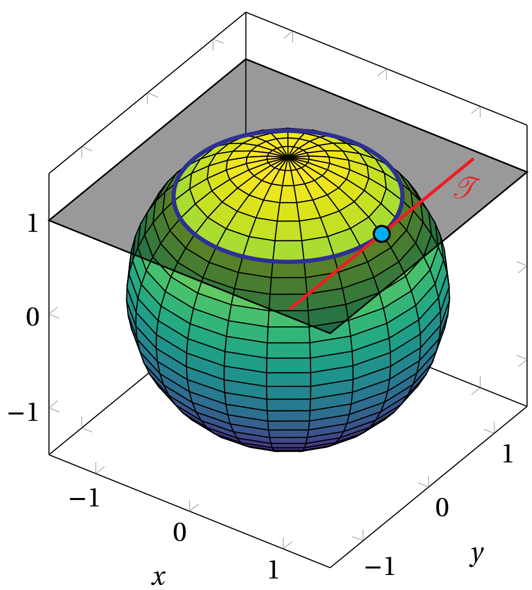
Exemple 14 : On considère les deux fonctions $g_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par $g_1 : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2$ et $g_2 : (x,y,z) \mapsto z - 1$. Les fonctions g_1 et g_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et on a

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla g_1(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \quad \text{et} \quad \nabla g_2(x,y,z) = (0,0,1).$$

Le point $(1,0,1)$ de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$ est régulier. On en déduit d'après la proposition précédente que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente en $M(1,0,1)$ d'équation

$$A(x,y,z) \in \mathscr{T} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \left\langle \overrightarrow{MA} \mid \nabla g_1(1,0,1) \right\rangle & = & 0 \\ \left\langle \overrightarrow{MA} \mid \nabla g_2(1,0,1) \right\rangle & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + z & = & 2 \\ z & = & 1. \end{array} \right.$$

On peut représenter la courbe $\mathscr{C}$ et sa tangente $\mathscr{T}$ au point $(1,0,1)$.



Définition (Section plane) : On appelle section plane d'une surface $\mathscr{S}$ l'intersection entre $\mathscr{S}$ et un plan.

Remarques 18 :

a) Si $\mathscr{P}$ est un plan de l'espace, alors le plan tangent de $\mathscr{P}$ en tout point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{P}$ est le plan $\mathscr{P}$. On en déduit que si $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S} \cap \mathscr{P}$ est un point régulier de la section plane $\mathscr{C} = \mathscr{S} \cap \mathscr{P}$, alors la tangente à $\mathscr{C}$ au point (x_0, y_0, z_0) est l'intersection entre $\mathscr{P}$ et le plan tangent de $\mathscr{S}$ en (x_0, y_0, z_0).

b) Les sections planes d'une surface $\mathscr{S}$ avec un plan d'équation $z = z_0$ avec $z_0 \in \mathbb{R}$ s'appelle les lignes de niveaux de la surface $\mathscr{S}$. On peut représenter l'allure d'une surface en traçant plusieurs de ses lignes de niveaux.

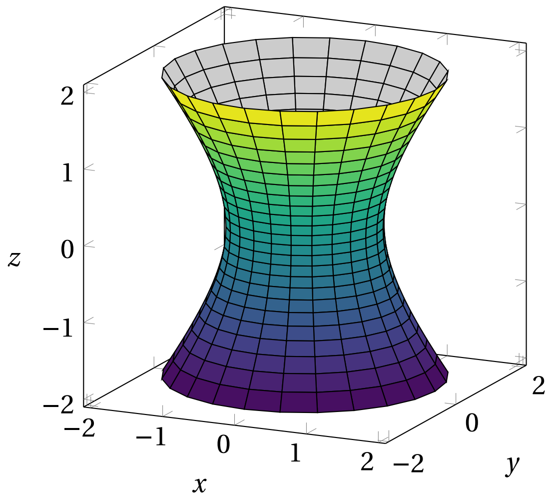
Exemples 15 :

a) La courbe de l'exemple précédent est une ligne de niveau la sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

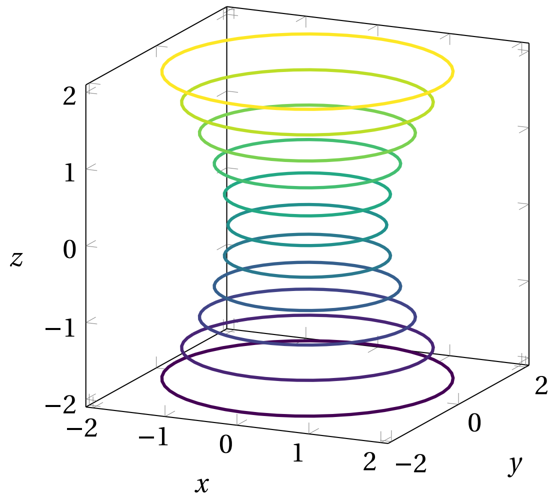
b) Dans l'exemple 5, les courbes tracées sur le premier graphique sont des lignes de niveaux de la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

c) Dans l'exemple 5, les courbes tracées sur le second graphique sont des sections planes de la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

d) Voici ci-dessous un autre exemple de surface représentée avec ses lignes de niveaux.



Une surface



Ses lignes de niveaux

Proposition 2 : Si $\mathscr{C}$ est une courbe tracée sur une surface $\mathscr{S}$ et si M est un point régulier à la fois de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{C}$, alors la tangente en M à $\mathscr{C}$ est incluse dans le plan tangent en M à $\mathscr{S}$.

Remarque 19 : La proposition précédente est valable que l'on considère une courbe (respectivement une surface) paramétrée ou définie par une équation cartésienne.

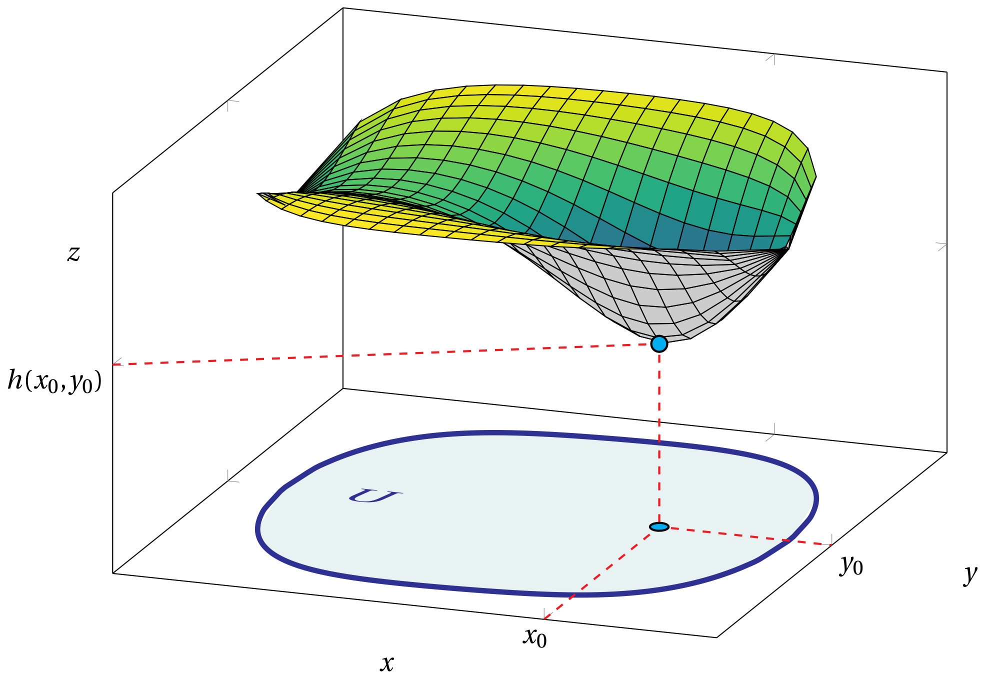
Partie V Quelques exemples de surfaces

V.A - Surfaces représentatives d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on considère une application $h : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Rappelons que sa surface représentative est définie par

$$\mathscr{S}_h = \left\{(x, y, h(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U\right\}.$$

On peut représenter une telle surface par le graphique ci-dessous.



On peut faire le lien entre cette surface $\mathscr{S}_h$ et les parties précédentes de deux manières.

- L'ensemble $\mathscr{S}_h$ est la surface paramétrée par la fonction $f : U \to \mathbb{R}^3$ définie par $f : (u, v) \mapsto (u, v, h(u, v))$.
- L'ensemble $\mathscr{S}_h$ est la surface d'équation $g(x, y, z) = 0$ où $g : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $g : (x, y, z) \mapsto z - h(x, y)$.

Dans la suite, on utilise le second point de vue pour déterminer l'équation du plan tangent en un point de la surface $\mathscr{S}_h$. L'application g est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in U \times \mathbb{R}$ que

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) \\ -\dfrac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme ce dernier vecteur n'est pas nul, on obtient que tout point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}_h$ est régulier. On en déduit que le plan tangent à la surface $\mathscr{S}_h$ au point $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ admet pour équation cartésienne

$$z = (x - x_0)\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) + h(x_0, y_0).$$

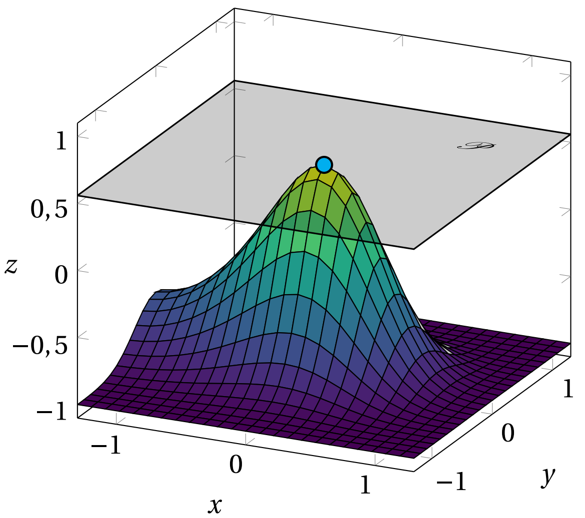
Remarque 20 : On aurait aussi pu utiliser le premier point de vue en regardant $\mathscr{S}_h$ comme une surface paramétrée pour aboutir au même résultat.

En particulier, si $(x_0, y_0) \in U$ est un point critique de la fonction h, alors une équation du plan tangent $\mathscr{P}$ à la surface représentative $\mathscr{S}_h$ de h au point $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ est $z = h(x_0, y_0)$.

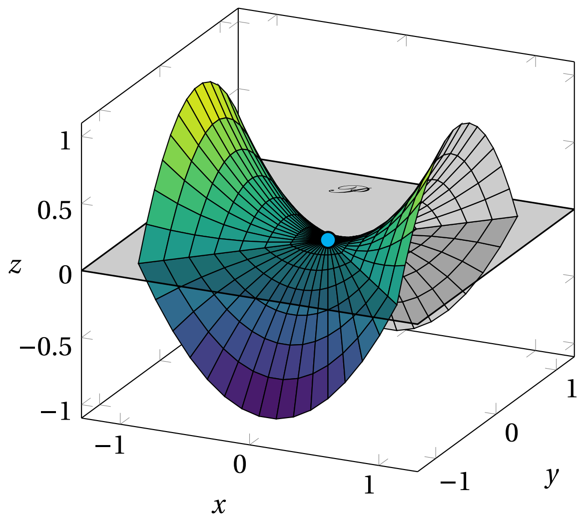
On en déduit que pour étudier la position relative entre la surface $\mathscr{S}_h$ et son plan tangent $\mathscr{P}$ au voisinage du point (x_0, y_0), il faut et il suffit d'étudier le signe de la fonction $(x, y) \longmapsto h(x, y) - h(x_0, y_0)$ au voisinage de (x_0, y_0). On conclut que l'on a les trois cas suivantes.

- La surface $\mathscr{S}_h$ est localement au-dessus du plan tangent au point $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ si et seulement si la fonction h admet un minimum local en (x_0, y_0).
- La surface $\mathscr{S}_h$ est localement en-dessous du plan tangent au point $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ si et seulement si la fonction h admet un maximum local en (x_0, y_0).
- La surface $\mathscr{S}_h$ traverse son plan tangent au point $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ si et seulement si la fonction h admet un point col en (x_0, y_0).

Illustration : On peut illustrer le constat précédent avec les deux graphiques ci-dessous.



Surface représentative avec
un maximum local



Surface représentative avec
un point col

V.B - Surfaces réglées

Dans cette sous-partie, on désigne par « surface » soit une surface paramétrée par une fonction vectorielle, soit une surface définie par une équation cartésienne.

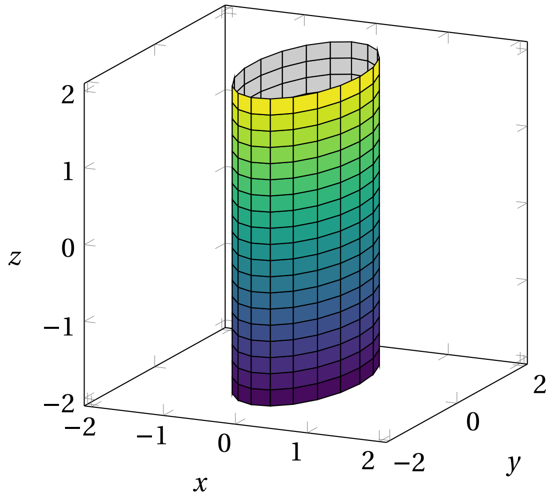
Définition (Surface réglée) : Une surface $\mathscr{S}$ de l'espace est dite réglée s'il existe une famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t\in I}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $\mathscr{S} = \bigcup_{t\in I} \mathscr{D}_t$.

Définition (Génératrices) : Les droites contenues dans une surface réglée $\mathscr{S}$ sont appelées génératrices de la surface $\mathscr{S}$.

Exemples 16 :

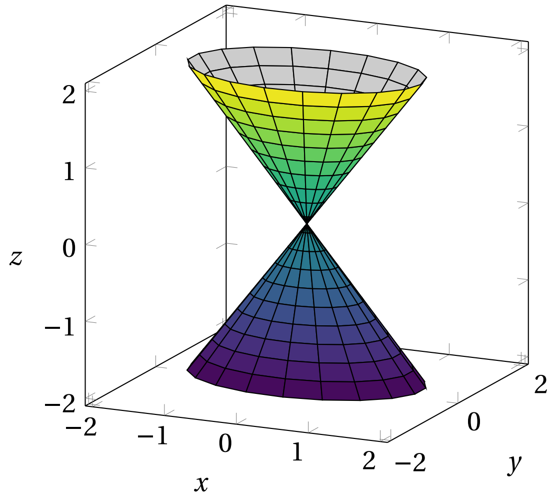
a) Les plans de l'espace sont des surfaces réglées.

b) Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$. Voici des exemples de surfaces réglées sur lesquelles sont tracées quelques génératrices.



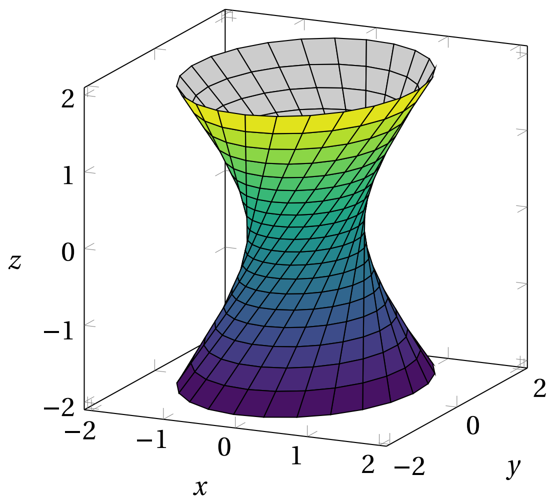
Un cylindre elliptique d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



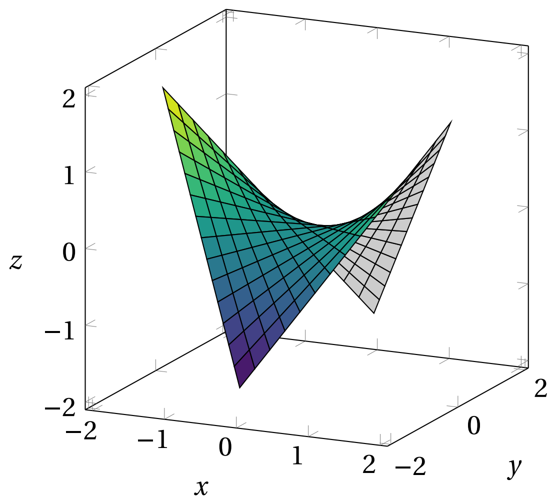
Un cône elliptique d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$



Un hyperboloïde à une nappe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Un paraboloïde hyperbolique d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

Exemple 17 : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la droite $\mathscr{D}_t$ de l'espace passant par le point $A_t(t, 0, t^2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}_t(1, 1, 2t)$. Déterminons la surface réglée $\mathscr{S}$ engendrée par la famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_t$ est

$$M(x, y, z) \in \mathscr{D}_t \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x &= t+\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= t^2+2\lambda t. \end{cases}$$

On en déduit qu'une représentation paramétrique de la surface $\mathscr{S}$ est

$$M(x, y, z) \in \mathscr{S} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x &= t+\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= t^2+2\lambda t. \end{cases}$$

Déterminons une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$. On procède en éliminant les paramètres t et λ. En injectant les relations $\lambda = y$ et $t = x - y$ dans la dernière équation, on obtient que

$$z = (x-y)^2 + 2y(x-y) \quad \Leftrightarrow \quad z = x^2 - y^2.$$

Nous avons prouvé que la surface $\mathscr{S}$ est incluse dans la surface d'équation $z = x^2 - y^2$. Réciproquement, si un point $M(x, y, z)$ de l'espace vérifie $z = x^2 - y^2$, alors en posant $\lambda = y$ et $t = x - y$, on obtient que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2-y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+\lambda \\ \lambda \\ (t+\lambda)^2-\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+\lambda \\ \lambda \\ t^2+2\lambda t \end{pmatrix},$$

donc $M(x, y, z) \in \mathscr{S}$. En reprenant les exemples précédents, on conclut que $\mathscr{S}$ est un paraboloïde hyperbolique.

Proposition 3 : Soit $\mathscr{S}$ une surface réglée de l'espace. Le plan tangent en un point régulier de $\mathscr{S}$ contient les génératrices de $\mathscr{S}$ passant par ce point.

V.C - Surfaces de révolution

Dans cette sous-partie, on désigne par « surface » soit une surface paramétrée par une fonction vectorielle, soit une surface définie par une équation cartésienne.

Définition (Surface de révolution) : Une surface $\mathscr{S}$ de l'espace est dite de révolution si elle s'obtient par la rotation d'une courbe $\mathscr{C}$ autour d'une droite Δ.

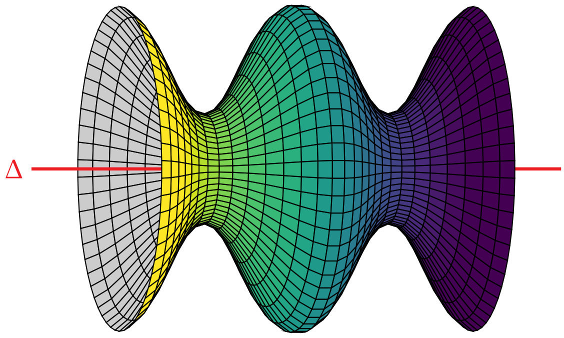
Définition : On reprend les notations de la définition précédente.

(i) La droite Δ s'appelle un axe de révolution de la surface $\mathscr{S}$.

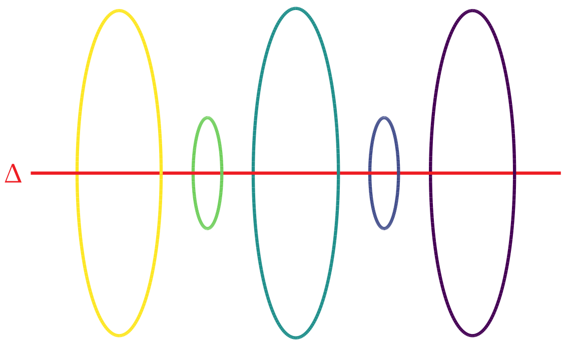
(ii) On appelle parallèle de $\mathscr{S}$ les cercles d'axe Δ rencontrant $\mathscr{S}$.

(iii) On appelle méridienne de $\mathscr{S}$ l'intersection entre un plan contenant Δ et la surface $\mathscr{S}$.

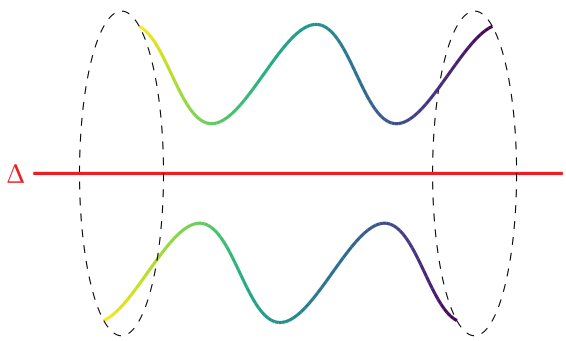
Illustration : Voici ci-dessous une surface de révolution $\mathscr{S}$ dont on note l'axe Δ.



On peut représenter quelques parallèles et une méridienne de cette surface.



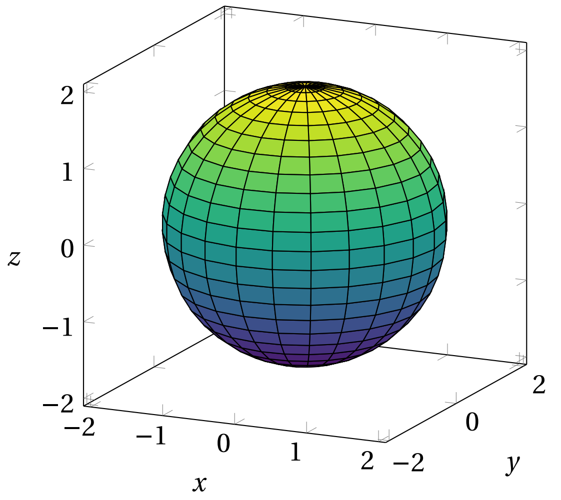
Quelques parallèles de la surface $\mathscr{S}$



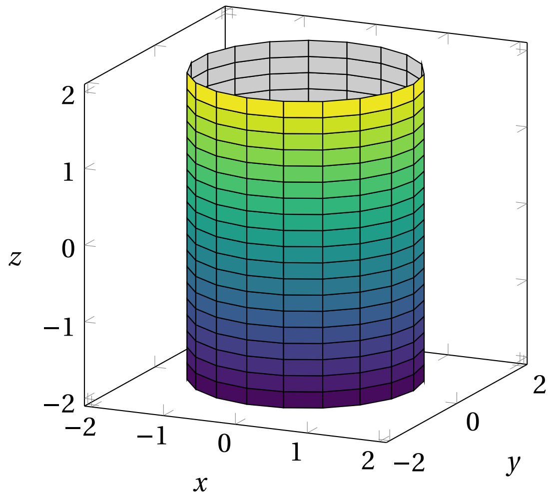
Une méridienne de la surface $\mathscr{S}$

Remarque 21 : Si la courbe $\mathscr{C}$ est une droite, alors la surface de révolution $\mathscr{S}$ est aussi une surface réglée.

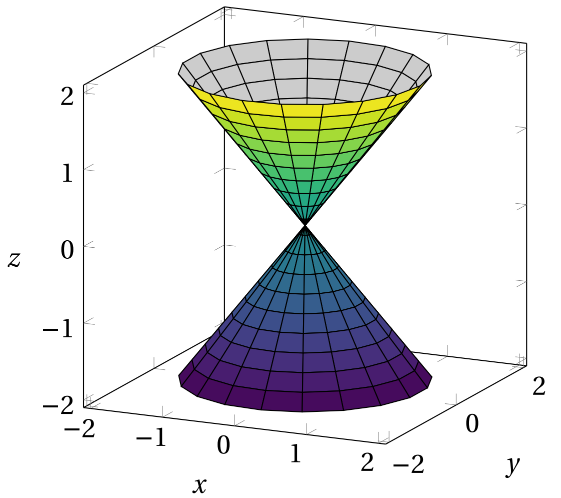
Exemple 18 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Voici des exemples de surfaces de révolution sur lesquelles sont tracées quelques parallèles et quelques méridiennes.



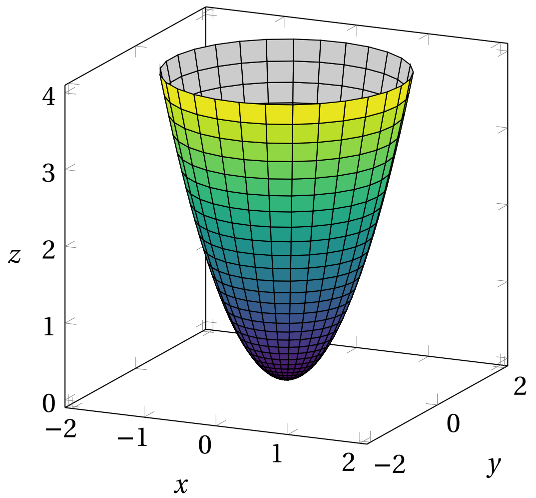
Une sphère d'équation
$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2$



Un cylindre de révolution d'équation
$x^2 + y^2 = \lambda^2$



Un cône de révolution d'équation
$x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$



Un paraboloïde de révolution d'équation
$x^2 + y^2 = \lambda^2 z$

Dans la suite, on considère une surface de révolution obtenue en faisant tourner une courbe $\mathscr{C}$ autour d'un axe Δ.

Dans le cas où Δ est l'un des axes du repères, il est aisée d'obtenir une paramétrisation de la surface $\mathscr{S}$. Si $f : I \to \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation de la courbe $\mathscr{C}$, alors une représentation paramétrique de $\mathscr{S}$ est

$$M(x, y, z) \in \mathscr{S} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (t, \theta) \in I \times \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_\Delta(\theta) \times f(t).$$

où $R_\Delta(\theta)$ est la matrice de la rotation d'axe Δ et d'angle θ (voir le tableau ci-dessous).

Axe des abscisses	**Axe des ordonnées**	**Axe des cotes**
$R_\Delta(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$	$R_\Delta(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$	$R_\Delta(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

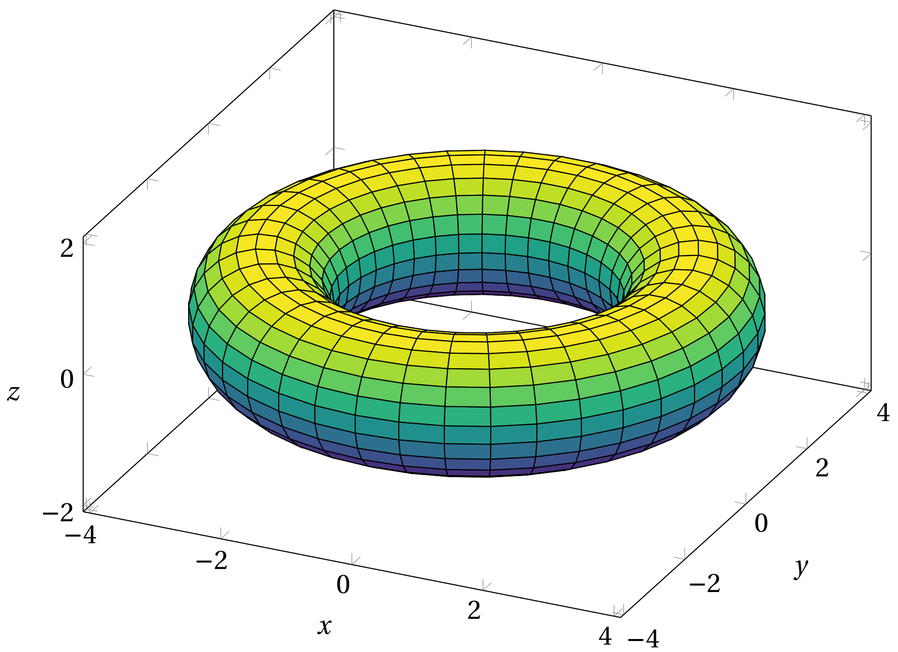
Exemple 19 : Dans le plan d'équation $x = 0$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(0, 3, 0)$ et de rayon 1. Déterminons une représentation paramétrique de la surface de révolution $\mathscr{S}$ obtenue en faisant tourner le cercle $\mathscr{C}$ autour de l'axe des cotes. La courbe $\mathscr{C}$ est paramétrée par la fonction vectorielle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

On en déduit qu'une représentation paramétrique de $\mathscr{S}$ est

$$M(x, y, z) \in \mathscr{S} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (t, \theta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)(3 + \cos(t)) \\ \cos(\theta)(3 + \cos(t)) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

En utilisant cette paramétrisation, on peut tracer cette surface (que l'on appelle un tore).

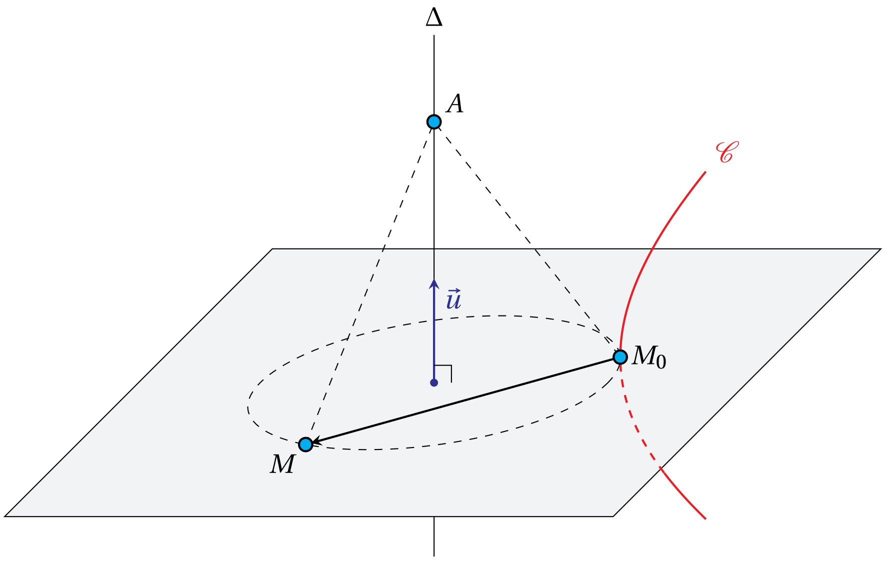


On peut également essayer de déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution $\mathscr{S}$. On considère un point $A \in \Delta$ et un vecteur directeur $\vec{u}$ de Δ.

Par définition d'une surface de révolution, un point M de l'espace appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si M appartient à une parallèle de la surface $\mathscr{S}$. On peut reformuler cette condition sous la forme suivante.

$$M \in \mathscr{S} \quad \Leftrightarrow \quad \exists M_0 \in \mathscr{C}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \overrightarrow{M_0 M} & \perp & \vec{u} \\ AM & = & AM_0. \end{array} \right.$$

On peut représenter l'équivalence ci-dessus sur le graphique suivant.



Exemple 20 : On considère la droite $\mathscr{C}$ dont une représentation paramétrique est

$$M(x,y,z) \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1+t \\ y & = & t \\ z & = & t. \end{array} \right.$$

Déterminons une équation cartésienne de la surface de révolution $\mathscr{S}$ obtenue en faisant tourner la droite $\mathscr{C}$ autour de l'axe des cotes.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathscr{S} \quad & \Leftrightarrow \quad \exists M_0 \in \mathscr{C}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \overrightarrow{M_0 M} & \perp & \vec{k} \\ OM & = & OM_0. \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (x-1-t)\times 0 + (y-t)\times 0 + (z-t)\times 1 & = & 0 \\ (x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 & = & (1+t)^2+t^2+t^2. \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & t \\ x^2+y^2+z^2 & = & 1+2t+3t^2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

En éliminant le paramètre t, on en déduit que la surface $\mathscr{S}$ est incluse dans la surface d'équation

$$x^2+y^2+z^2 = 1+2z+3z^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2-2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

On obtient l'inclusion réciproque en posant $t = z$ dans l'équation précédente et en remontant les équivalences précédentes.

On peut peut tracer la surface $\mathscr{S}$ (que l'on appelle un hyperboloïde de révolution).