

# CHAPITRE 10

## Courbes planes

Jérôme VON BUHREN

<http://vonbuhren.free.fr>

**Lycée Couffignal - PT\***

D'après le cours de première année, nous savons que toute droite  $\mathcal{D}$  du plan admet une représentation paramétrique de la forme

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x &= x_0 + t\alpha \\ y &= y_0 + t\beta \end{cases}$$

où  $(x_0, y_0)$  est un point de  $\mathcal{D}$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  est un vecteur directeur de la droite  $\mathcal{D}$ . Autrement dit, la droite  $\mathcal{D}$  est l'image de la fonction vectorielle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f : t \mapsto (x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta)$ . D'autre part, nous savons également décrire la droite  $\mathcal{D}$  avec une équation cartésienne de la forme

$$M(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \Leftrightarrow \quad ax + by + c = 0.$$

où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  est un vecteur non nul et  $c \in \mathbb{R}$ .

On peut également décrire d'autres courbes par les deux méthodes précédentes. Par exemple, le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et de rayon  $R > 0$  admet une représentation paramétrique de la forme

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x &= x_0 + R\cos(t) \\ y &= y_0 + R\sin(t). \end{cases}$$

Ce dernier peut également se définir par l'équation cartésienne

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0.$$

Dans ce chapitre, nous allons généraliser les exemples précédents pour pouvoir définir et étudier une courbe plane à partir d'une représentation paramétrique ou d'une équation cartésienne.

---

Dans tout le chapitre, on considère un plan affine euclidien orienté  $\mathcal{P}$ . On munit cet espace d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , ce qui permet de l'identifier à  $\mathbb{R}^2$ .

### Définition (Courbe plane paramétrée)

Une courbe plane paramétrée est une fonction vectorielle  $f$  définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ .

### Remarques 1

- On peut également définir une courbe paramétrée  $f = (x, y)$  par ses fonctions coordonnées  $x$  et  $y$ .
- Lorsque qu'il n'y a pas ambiguïté, on utilise souvent la notation  $f : t \mapsto M(t)$ .

### Définition (Support d'une courbe paramétrée)

Le support d'une courbe paramétrée  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est l'ensemble

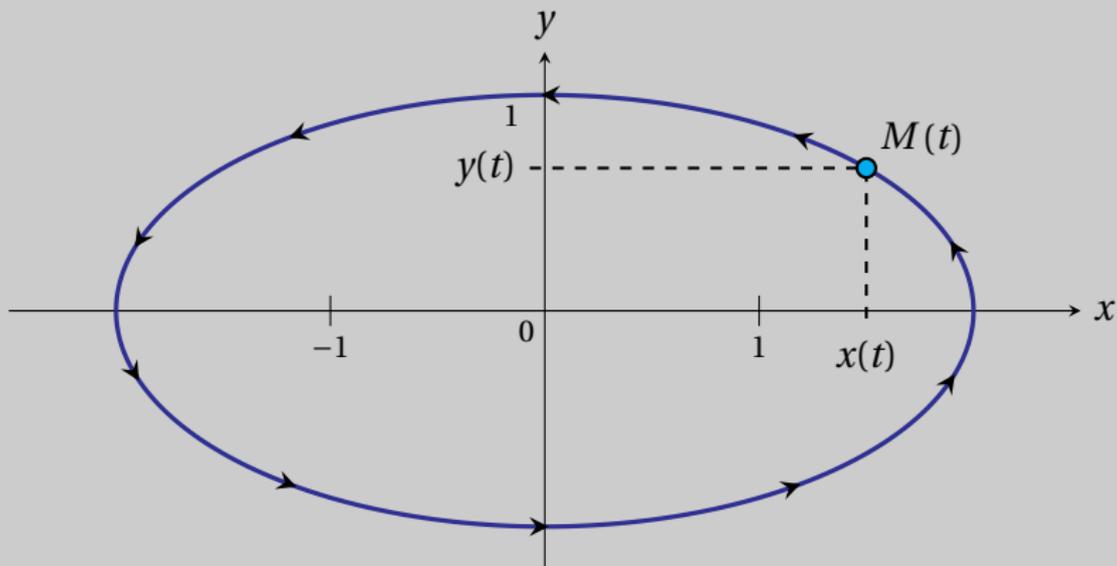
$$f(I) = \{f(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\}.$$

### Remarques 2

- En notant le support  $\mathcal{C} = f(I)$ , on dit que la courbe  $\mathcal{C}$  est paramétrée par la fonction  $f$  ou que  $f$  est une paramétrisation de la courbe  $\mathcal{C}$ .
- D'un point de vue physique, une courbe paramétrée décrit le mouvement d'un objet dans le plan et le support représente la trajectoire de cet objet.

**Exemple 1**

Traçons la courbe paramétrée par  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f : t \mapsto (2 \cos(t), \sin(t))$ .



**ATTENTION**

Une courbe paramétrée ne se résume pas à son support. Le support est un objet géométrique (l'ellipse dans l'exemple précédent), tandis que la courbe paramétrée  $f$  donne une information supplémentaire : elle indique la manière dont le support est parcouru.

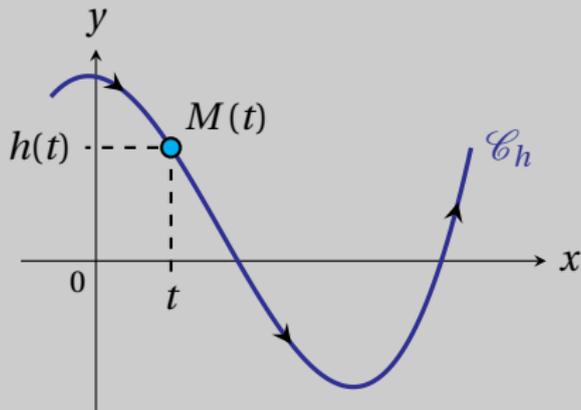
On peut décrire le même objet géométrique de plusieurs manières. Par exemple, l'ellipse précédente est aussi paramétrée par la fonction vectorielle  $g : t \mapsto (2 \cos(t^2), \sin(t^2))$ .

**Remarque 3**

Si  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction réelle de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors sa courbe représentative

$$\mathcal{C}_h = \{(t, h(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\}$$

est le support de la courbe paramétrée par l'application  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f: t \mapsto (t, h(t))$ .



En particulier, tous les résultats que nous allons voir dans ce chapitre peuvent s'appliquer au courbe représentative d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Dans cette partie, on considère une courbe paramétrée par  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  et un point  $t_0 \in I$ . On suppose qu'il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall t \in I \cap ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \setminus \{t_0\}, \quad M(t) \neq M(t_0).$$

Autrement dit, la courbe paramétrée par la restriction de  $f$  au voisinage  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$  passe en  $M(t_0)$  uniquement lorsque  $t = t_0$ . Cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée en théorie, mais elle le sera en pratique. En particulier, on en déduit que la fonction

$$\nu : t \mapsto \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\left\| \overrightarrow{M(t_0)M(t)} \right\|}.$$

est définie sur l'intervalle  $I \cap ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \setminus \{t_0\}$ .

Pour tout  $t \in I \cap ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \setminus \{t_0\}$ , l'élément  $\nu(t)$  est un vecteur unitaire dirigeant la droite  $(M(t_0)M(t))$ .

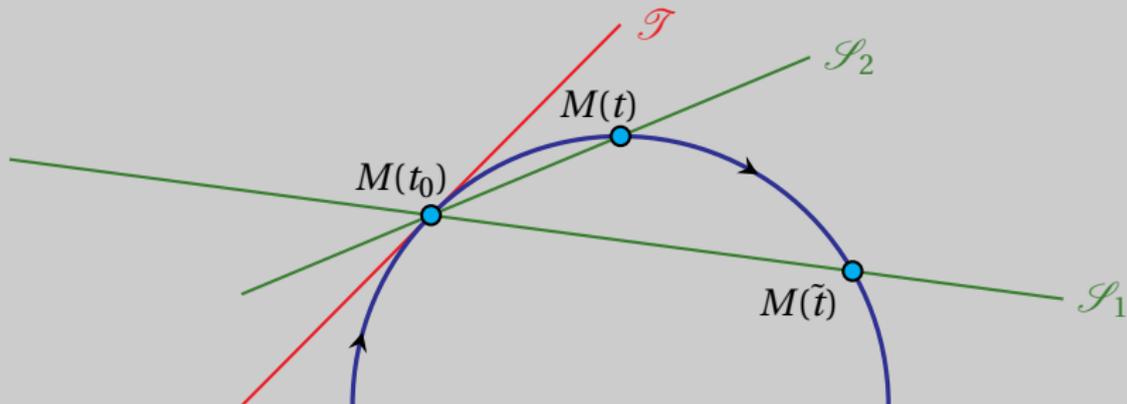
**Définition (Tangente à une courbe paramétrée)**

Si la fonction  $\nu$  admet une limite  $\vec{\nu}_g$  lorsque  $t \rightarrow t_0^-$ , une limite  $\vec{\nu}_d$  lorsque  $t \rightarrow t_0^+$  et si  $\vec{\nu}_d = \pm \vec{\nu}_g$ , alors on appelle tangente à la courbe en  $M(t_0)$  la droite passant par le point  $M(t_0)$  et dirigée par  $\vec{\nu}_d$ .

## Illustration

Intuitivement, la tangente en  $f(t_0)$  est la limite de la sécante  $(M(t_0)M(t))$  quand  $t \rightarrow t_0$ .

Sur la figure ci-dessous, les droites  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont deux sécantes passant par les points  $M(t_0)$  et  $M(t)$  pour deux valeurs de  $t$  distinctes. La droite  $\mathcal{T}$  est la tangente en  $M(t_0)$  à la courbe paramétrée  $f$ .



### Définition (Point régulier)

On dit qu'un point  $M(t_0)$  de la courbe paramétrée par  $f$  est régulier si le vecteur  $f'(t_0)$  est non nul. Dans le cas contraire, on dit que le point  $M(t_0)$  est stationnaire (ou singulier).

### Exemple 2

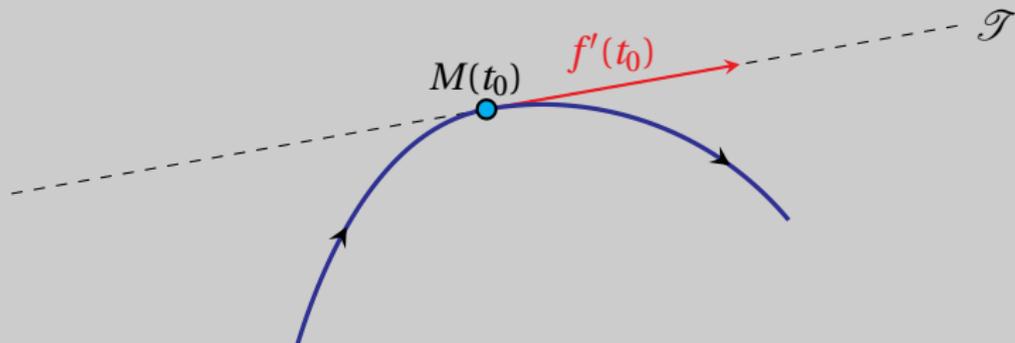
La courbe paramétrée par  $f : t \mapsto (t^2, t^3)$  admet  $M(0)$  comme unique point stationnaire.

### Théorème (Existence de la tangente en un point régulier)

Si le point  $M(t_0)$  est régulier, alors la courbe paramétrée admet une tangente en  $M(t_0)$  dont un vecteur directeur est  $f'(t_0)$ .

### Illustration

Si  $M(t_0)$  est un point régulier de la courbe paramétrée par  $f$  et si on note  $\mathcal{T}$  la tangente à la courbe en  $M(t_0)$ , alors on peut représenter la situation avec le graphique ci-dessous.



**Remarques 4**

- a) La tangente d'une courbe paramétrée en un point est un objet géométrique : elle ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe. En effet, si  $\varphi : J \rightarrow I$  est une fonction bijective de classe  $\mathcal{C}^1$  définie sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$ , alors les courbes paramétrées par  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  et par  $g = f \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  ont le même support. De plus, si on note  $s_0 = \varphi^{-1}(t_0)$ , alors on a

$$g'(s_0) = \varphi'(s_0)f'(\varphi(s_0)) = \varphi'(s_0)f'(t_0),$$

donc les vecteurs  $g'(s_0)$  et  $f'(t_0)$  sont colinéaires.

**Remarques 4**

b) Si  $M(t_0)$  est un point régulier de la courbe paramétrée par  $f$ , on en déduit une représentation paramétrique de la tangente  $\mathcal{T}$  en  $M(t_0)$  avec les équivalences

$$\begin{aligned} A(x, y) \in \mathcal{T} &\Leftrightarrow \overrightarrow{M(t_0)A} \in \text{Vect}(f'(t_0)) \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x(t_0) + tx'(t_0) \\ y = y(t_0) + ty'(t_0). \end{cases} \end{aligned}$$

**Remarques 4**

c) Si  $M(t_0)$  est un point régulier de la courbe paramétrée par  $f$ , on en déduit une équation cartésienne de la tangente  $\mathcal{T}$  en  $M(t_0)$  avec les équivalences

$$\begin{aligned} A(x, y) \in \mathcal{T} &\Leftrightarrow \overrightarrow{M(t_0)A} \in \text{Vect}(f'(t_0)) \\ &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{M(t_0)A}, f'(t_0)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

### Exemple 3

On considère la courbe paramétrée par  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  où  $f$  est définie par  $f: t \mapsto (2 \cos(t), \sin(t))$ . On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = (-2 \sin(t), \cos(t)).$$

Comme  $\cos$  et  $\sin$  ne s'annulent pas simultanément, tous les points de la courbe sont réguliers.

Par le théorème précédent, on en déduit que la courbe admet une tangente  $\mathcal{T}$  en  $M(t_0)$  dirigé par le vecteur  $f'(t_0)$ . Une représentation paramétrique de  $\mathcal{T}$  est

$$\begin{cases} x &= 2 \cos(t_0) - 2t \sin(t_0) \\ y &= \sin(t_0) + t \cos(t_0). \end{cases}$$

**Exemple 3**

D'autre part, une équation cartésienne de  $\mathcal{C}$  est

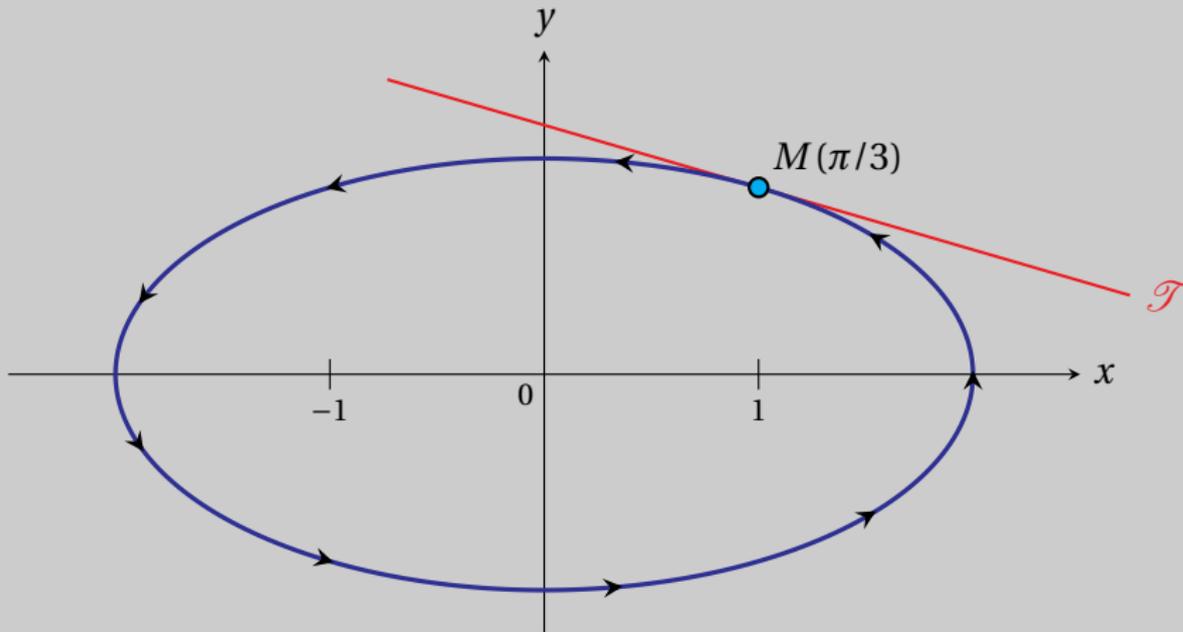
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0 & \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 2 \cos(t_0) & -2 \sin(t_0) \\ y - \sin(t_0) & \cos(t_0) \end{vmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow \cos(t_0)x + 2 \sin(t_0)y = 2. \end{aligned}$$

En particulier, la tangente à la courbe au point  $M\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  admet pour équation cartésienne

$$x + 2\sqrt{3}y = 4.$$

**Exemple 3**

On peut représenter la courbe et sa tangente sur le graphique ci-dessous.



**Définition (Droite normale)**

La droite normale à la courbe paramétrée en un point régulier  $M(t_0)$  est la droite passant par  $M(t_0)$  et orthogonale à la tangente.

**Définition (Courbe régulière)**

La courbe paramétrée par  $f$  est dite régulière si tous ses points sont réguliers.

**Remarques 5**

- a) Une courbe paramétrée régulière est orientable :  
l'application  $\vec{T} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\forall t \in I, \quad \vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

est une application continue telle que pour tout  $t \in I$ , le vecteur  $\vec{T}(t)$  est unitaire et dirige la tangente à la courbe au point  $M(t)$ .

- b) Si une courbe est orientable, alors l'orienter revient à choisir un sens de parcours parmi les deux possibles.

**Exemple 4**

La courbe paramétrée de l'exemple précédent est régulière.

Dans cette partie, on considère une courbe paramétrée par  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  et un point  $t_0 \in I$ . On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et que les deux entiers

$$p = \min \left\{ k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(t_0) \neq 0 \right\},$$

$$q = \min \left\{ k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(t_0) \text{ n'est pas colinéaire à } f^{(p)}(t_0) \right\}.$$

existent. Ces hypothèses ne sont pas toujours vérifiées en théorie, mais elles le seront en pratique.

En utilisant la formule de Taylor-Young au point  $t_0$  à l'ordre  $q$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = f(t_0+h) - f(t_0) &= \sum_{k=1}^q \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} h^k + o(h^q) \\ &= \sum_{k=p}^{q-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(q)}(t_0)}{q!} h^q + o(h^q). \end{aligned}$$

Par définition de l'entier  $q$ , tous les termes de la première somme sont colinéaires au vecteur  $f^{(p)}(t_0)$ , donc

$$\forall k \in \llbracket p+1, q-1 \rrbracket, \quad \exists \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(t_0) = \lambda_k f^{(p)}(t_0).$$

De plus, comme les vecteurs  $f^{(p)}(t_0)$  et  $f^{(q)}(t_0)$  ne sont pas colinéaires, ils forment une base de  $\mathbb{R}^2$ . On en déduit qu'il existe deux fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  définies sur un voisinage de 0, de limite nulle en 0 et vérifiant

$$o(h^q) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^q o(1) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^q (\alpha(h) f^{(p)}(t_0) + \beta(h) f^{(q)}(t_0)).$$

En reprenant le calcul précédent, on obtient donc

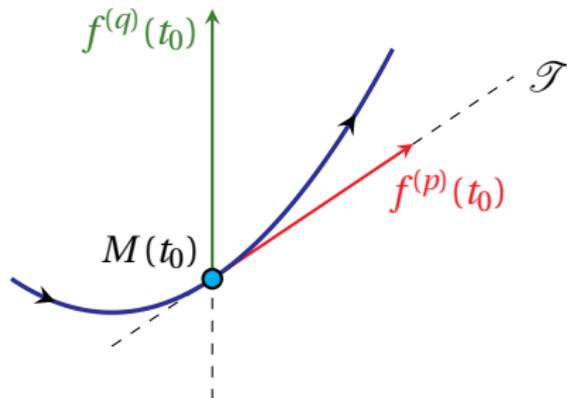
$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} \underbrace{\left( \frac{h^p}{p!} + \sum_{k=p+1}^{q-1} \frac{\lambda_k}{k!} h^k + h^q \alpha(h) \right)}_{X(h)} f^{(p)}(t_0) + \underbrace{\left( \frac{h^q}{q!} + h^q \beta(h) \right)}_{Y(h)} f^{(q)}(t_0).$$

On conclut que l'on a

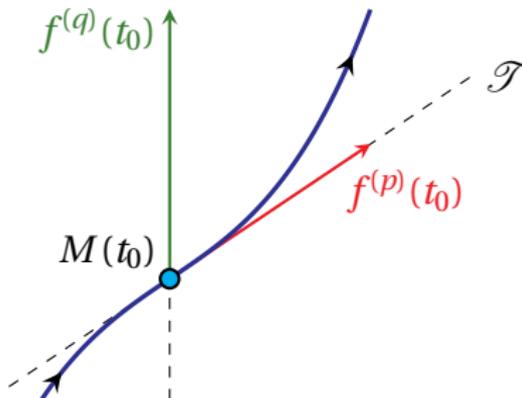
$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} X(h) f^{(p)}(t_0) + Y(h) f^{(q)}(t_0)$$

avec  $X(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{h^p}{p!}$  et  $Y(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{h^q}{q!}$ .

On déduit du calcul ci-dessus qu'il y a 4 configurations possibles.

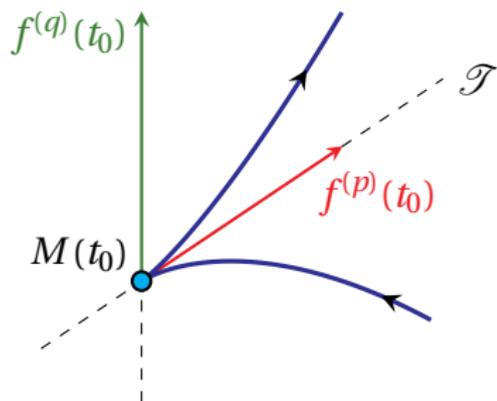


Point ordinaire  
( $p$  impair,  $q$  pair)

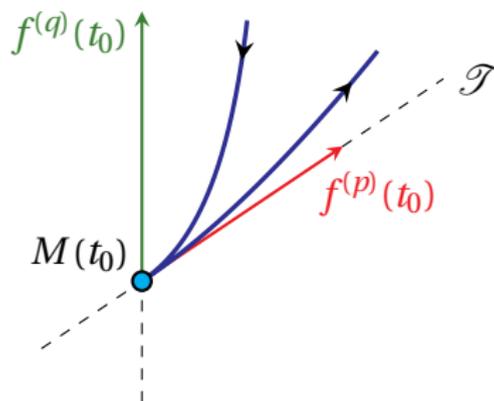


Point d'inflexion  
( $p$  impair,  $q$  impair)

On déduit du calcul ci-dessus qu'il y a 4 configurations possibles.



Point de rebroussement  
de première espèce  
( $p$  pair,  $q$  impair)



Point de rebroussement  
de seconde espèce  
( $p$  pair,  $q$  pair)

**Remarques 6**

- a) On en déduit que la courbe paramétrée admet une tangente en  $M(t_0)$  dont un vecteur directeur est  $f^{(p)}(t_0)$ .
- b) On constate également que la tangente à la courbe paramétrée par  $f$  au point  $M(t_0)$  traverse la courbe en  $M(t_0)$  si et seulement si l'entier  $q$  est impair.
- c) Pour déterminer les entiers  $p$  et  $q$ , on dispose principalement de deux méthodes :
  - On peut effectuer un calcul direct des dérivées successives de  $f$  en  $t_0$ .
  - On peut calculer un développement limité de  $f$  au point  $t_0$  à un ordre suffisant.

**Exemple 5**

Étudions les points stationnaires de la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ y(t) = \frac{t^3 - 1}{t^2 + 1}. \end{cases}$$

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{t(t^3 + 3t + 2)}{(t^2 + 1)^2}.$$

### Exemple 5

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et on a

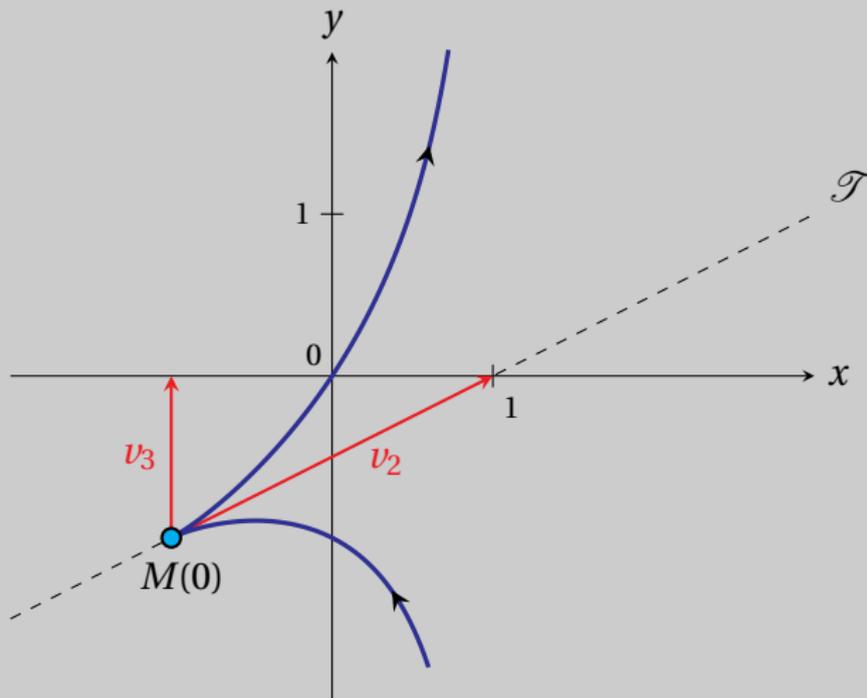
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{t(t^3 + 3t + 2)}{(t^2 + 1)^2}.$$

On en déduit que la courbe n'admet que  $M(0) = (-1, -1)$  en point stationnaire. De plus, en calculant les développements limités de  $x$  et  $y$  en  $t = 0$  à l'ordre 3, on a que

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} t^2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} t^3 + o(t^3).$$

On en déduit que  $p = 2$  et  $q = 3$ , donc  $M(0)$  est un point de rebroussement de première espèce. De plus, on conclut que la courbe admet une tangente  $\mathcal{T}$  en  $M(0)$  dirigé par le vecteur  $(2, 1)$ .

## Exemple 5



**Exemple 6**

Déterminons les points d'inflexions de la courbe paramétrée par

$$f: t \mapsto (t + 2t^2 - t^3, t + 2t^2).$$

Si  $f(t_0)$  est un point d'inflexion de la courbe, alors l'entier  $q$  associé est impair, donc on a nécessairement que les vecteurs  $f'(t_0)$  et  $f''(t_0)$  sont colinéaires. En notant  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , on a

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{C}}(f'(t_0), f''(t_0)) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 + 4t_0 - 3t_0^2 & 4 - 6t_0 \\ 1 + 4t_0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 12t_0^2 + 6t_0 = 0 \quad \Leftrightarrow t_0 \in \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

**Exemple 6**

Réciproquement, on étudie si  $f(0)$  et  $f(-1/2)$  sont des points d'inflexion.

- Pour le point  $f(0)$ , on a par un calcul direct que

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^2}, \quad f''(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4f'(0), \quad f^{(3)}(0) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc  $p = 1$  et  $q = 3$ . Comme  $p$  et  $q$  sont impairs, on en déduit que  $f(0)$  est un point d'inflexion de la courbe.

- Pour le point  $f(1/2)$ , on a par un calcul direct que

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -7/4 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^2}, \quad f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = -4f'\left(-\frac{1}{2}\right), \quad f^{(3)}\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc  $p = 1$  et  $q = 3$ . Comme  $p$  et  $q$  sont impairs, on en déduit que  $f(-1/2)$  est un point d'inflexion de la courbe.

On dit qu'une courbe paramétrée par  $f = (x, y) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  admet une branche infinie lorsque  $t$  tend vers une extrémité  $t_0$  de l'intervalle  $I$  si l'une des coordonnées  $x$  ou  $y$  tend vers l'infini.

On peut distinguer plusieurs types de branche infinie.

- 1) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$ , alors la courbe admet une asymptote horizontale d'équation  $y = y_0$ .
- 2) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$ , alors la courbe admet une asymptote verticale d'équation  $x = x_0$ .

- 3) Si les deux coordonnées tendent vers l'infini, on étudie la limite du quotient  $\frac{y(t)}{x(t)}$ .
- a) Si cette limite est nulle, on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction  $(Ox)$ .
  - b) Si cette limite est infinie, on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction  $(Oy)$ .
  - c) Si cette limite est un nombre  $a \in \mathbb{R}^*$ , alors on étudie la limite de  $y(t) - ax(t)$ .
    - (i) Si cette dernière quantité tend vers  $\pm\infty$ , on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction  $y = ax$ .
    - (ii) Si cette dernière quantité tend vers  $b \in \mathbb{R}$ , alors la courbe admet la droite d'équation  $y = ax + b$  comme asymptote. On peut également étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote en étudiant le signe de  $y(t) - ax(t) - b$  lorsque  $t \rightarrow t_0$ .

**Exemple 7**

Étudions les branches infinies de la courbe paramétrée

$$\text{par } f: t \mapsto \left( \frac{t}{t-1}, \frac{t^2}{t-1} \right).$$

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

- On a  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 1$  et  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \pm\infty$ , donc la courbe admet une asymptote verticale d'équation  $x = 1$ .

**Exemple 7**

- On a  $\lim_{t \rightarrow 1^+} x(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} y(t) = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} y(t) = -\infty$ . De plus, on a

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^2}{t} = t \xrightarrow{t \rightarrow 1} 1 = a \quad \text{et} \quad y(t) - ax(t) = \frac{t^2 - t}{t - 1} = t \xrightarrow{t \rightarrow 1} 1 = b,$$

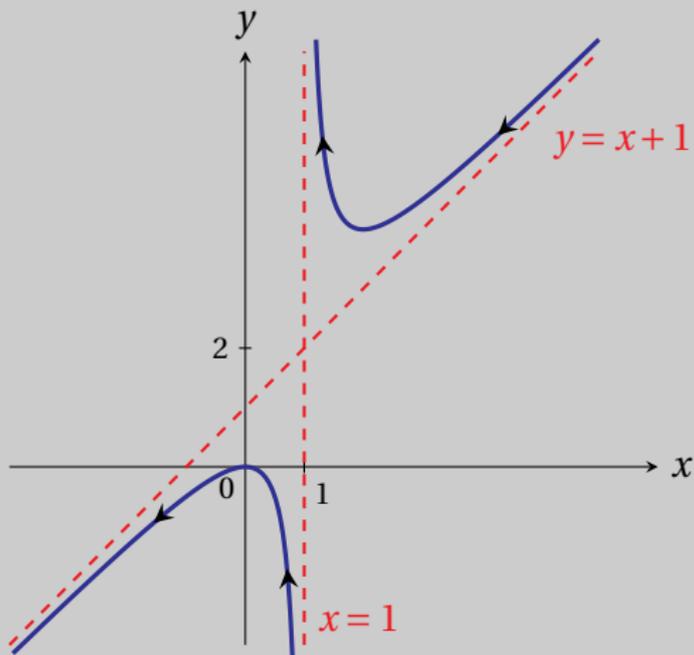
donc la courbe admet la droite d'équation  $y = x + 1$  comme asymptote. Finalement, on a

$$y(t) - ax(t) - b = y(t) - x(t) - 1 = t - 1.$$

On en déduit que la courbe est au-dessus de l'asymptote lorsque  $t \rightarrow 1^+$  et que la courbe est en-dessous de l'asymptote lorsque  $t \rightarrow 1^-$ .

**Exemple 7**

On peut représenter la courbe et ses asymptotes sur le graphique ci-dessous.



On considère une courbe paramétrée par  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Nous allons voir comment exploiter les propriétés de la fonction  $f = (x, y)$  pour restreindre l'intervalle d'étude.

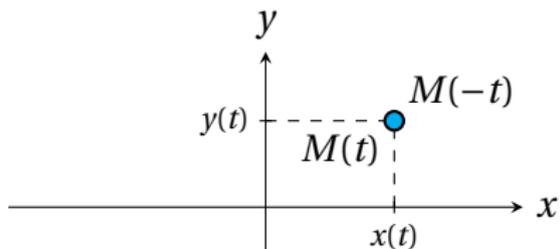
### I.E.1 - Périodicité

Si  $f$  est  $T$ -périodique, alors le point  $M(t)$  est le même que le point  $M(t + T)$ , donc il suffit d'étudier la courbe paramétrée  $f$  sur un intervalle de longueur  $T$ .

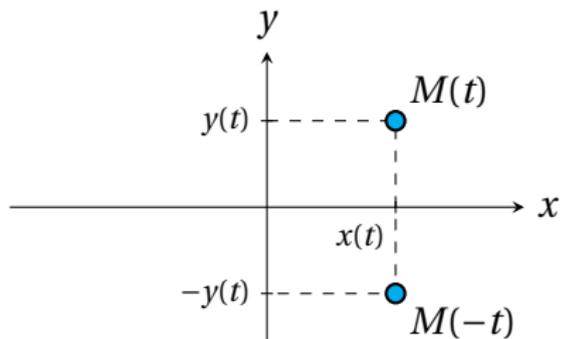
Propriété	Restriction	Transformation
$x$ et $y$ sont $T$ -périodiques	Intervalle de longueur $T$	Identité

## I.E.2- Parité

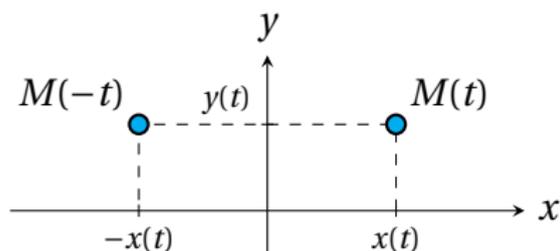
Si  $x$  et  $y$  ont une propriété de parité, alors le point  $M(-t)$  se construit géométriquement à partir du point  $M(t)$ . Il suffit donc d'étudier la courbe paramétrée par  $f$  sur l'intervalle  $I \cap \mathbb{R}_+$ . Il est préférable de faire un dessin.



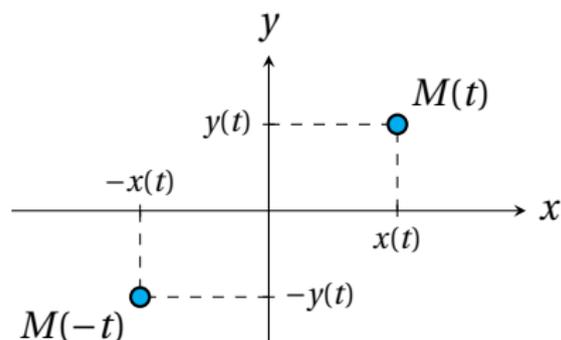
$x$  paire et  $y$  paire



$x$  paire et  $y$  impaire



$x$  impaire et  $y$  paire



$x$  impaire et  $y$  impaire

Tous les cas sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Propriété	Restriction	Transformation
$x$ paire et $y$ paire	$I \cap \mathbb{R}_+$	Identité
$x$ paire et $y$ impaire	$I \cap \mathbb{R}_+$	Symétrie par rapport à $(Ox)$
$x$ impaire et $y$ paire	$I \cap \mathbb{R}_+$	Symétrie par rapport à $(Oy)$
$x$ impaire et $y$ impaire	$I \cap \mathbb{R}_+$	Symétrie par rapport à $O$

On considère une courbe paramétrée par  $f = (x, y) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dont on souhaite tracer le support.

- 1) On détermine l'ensemble de définition de  $f$  et on essaye de restreindre l'intervalle d'étude (voir la partie précédente).
- 2) On dresse le tableau de variations commun de  $x$  et  $y$  sur  $I$ .
- 3) On étudie les éventuelles branches infinies de la courbe.
- 4) On détermine la tangente à la courbe au point  $M(t)$  pour chaque valeur  $t \in I$  apparaissant dans le tableau de variations.
- 5) On trace la courbe en respectant les différentes informations obtenues.
- 6) On en déduit toute la courbe en effectuant les transformations qui nous ont permis de restreindre l'intervalle d'étude.

**Exemple 8**

Nous allons tracer la courbe paramétrée par la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (\cos(3t), \sin(2t)).$$

- 1) La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, donc on peut restreindre l'étude à  $[-\pi, \pi]$ .

De plus, la fonction  $x$  est paire et la fonction  $y$  est impaire, donc on peut restreindre l'étude à  $[0, \pi]$ . Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à  $(Ox)$ .

**Exemple 8**

2) Dressons un tableau de variations pour  $x$  et  $y$ . Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables sur  $[0, \pi]$  et on a

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow -3 \sin(3t) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi \right\}$$

$$\text{et } y'(t) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos(2t) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

## Exemple 8

2) On obtient donc le tableau de variations suivant.

$t$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$x'(t)$	0	-	0	+	0	-
$x$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$y'(t)$	+	0	-	0	+	
$y$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0

**Exemple 8**

- 3) Cette courbe n'admet pas de branches infinies.
- 4) On observe avec le tableau de variations que  $f'(t) = (0, \alpha)$  avec  $\alpha \neq 0$  pour chaque valeur  $t \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$ . On en déduit qu'au point  $M(t)$  correspondant, la tangente à la courbe paramétrée par  $f$  est verticale.

On observe avec le tableau de variations que  $f'(t) = (\alpha, 0)$  avec  $\alpha \neq 0$  pour chaque valeur  $t \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ . On en déduit qu'au point  $M(t)$  correspondant, la tangente à la courbe paramétrée par  $f$  est horizontale.

On remarque que cette courbe n'admet pas de points stationnaires.

**Exemple 8**

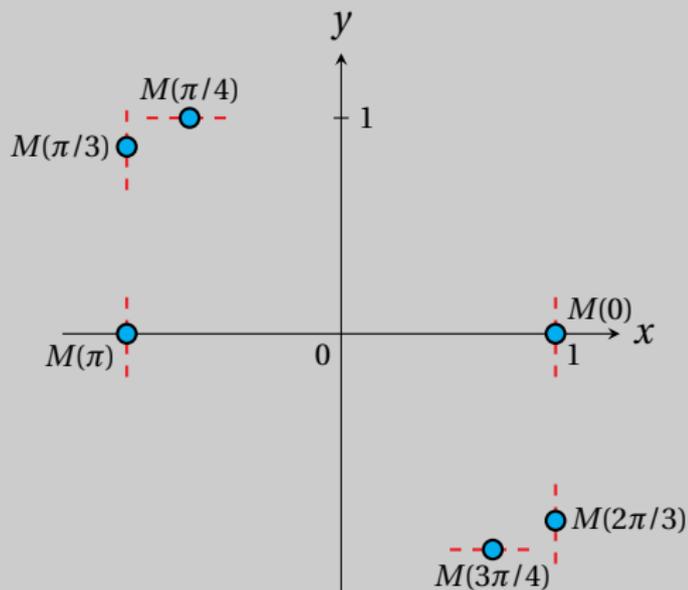
- 5) On peut commencer à tracer la courbe paramétrée.
- a) On place les points  $M(t)$  pour chaque valeur

$$t \in \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \pi \right\}.$$

- b) On trace la tangente à la courbe en chacun de des points que l'on vient de placer.
- c) On relie les différents points en respectant les variations de  $x$  et  $y$ , les branches infinies et les tangentes.

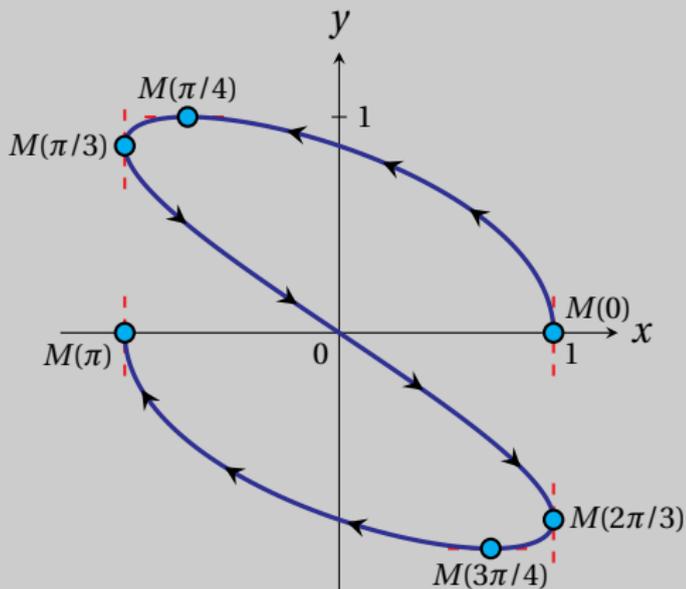
**Exemple 8**

5) On obtient le tracé suivant de la courbe paramétré  $f$  pour  $t \in [0, \pi]$ .



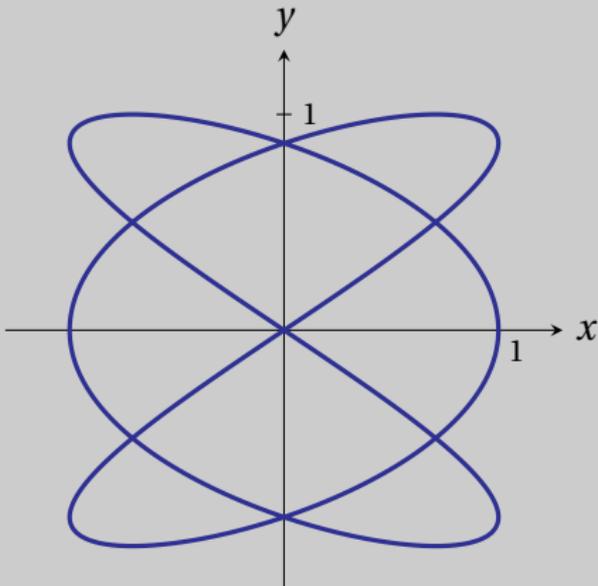
**Exemple 8**

5) On obtient le tracé suivant de la courbe paramétrée  $f$  pour  $t \in [0, \pi]$ .



**Exemple 8**

- 6) Pour obtenir le tracé complet, il suffit d'appliquer la symétrie par rapport à l'axe  $(Ox)$ .



Dans cette partie, on considère une courbe régulière paramétrée par  $f = (x, y) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Définition (Longueur d'une courbe régulière)**

Soit  $(a, b) \in I^2$  avec  $a \leq b$ . La longueur de la courbe régulière paramétrée par  $f$  du point  $M(a)$  au point  $M(b)$  est

$$L_f(a, b) = \int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

**Remarques 7**

- a) Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  décrit la trajectoire d'un objet, alors le nombre  $\|f'(t)\|$  est la vitesse de l'objet à l'instant  $t$ , ce qui permet d'interpréter cinématiquement la formule donnée dans la définition.

**Remarques 7**

b) La longueur d'une courbe paramétrée entre deux de ses points est une notion géométrique : elle ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe. En effet, si  $\varphi : J \rightarrow I$  est une fonction bijective de classe  $\mathcal{C}^1$  définie sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$ , alors les courbes paramétrées  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  et par  $g = f \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  ont le même support. De plus, si on note  $c = \varphi^{-1}(a)$  et  $d = \varphi^{-1}(b)$  et que l'on suppose que la fonction  $\varphi$  est strictement croissante (le calcul est analogue si  $\varphi$  est strictement décroissante), on obtient avec la formule du changement de variable que

$$\begin{aligned} L_f(a, b) &= \int_a^b \|f'(t)\| dt \stackrel{t=\varphi(u)}{=} \int_c^d \|f'(\varphi(u))\| \varphi'(u) du \\ &\stackrel{\varphi' \geq 0}{=} \int_c^d \|\varphi'(u) f'(\varphi(u))\| du \\ &= \int_c^d \|g'(u)\| du = L_g(c, d). \end{aligned}$$

**Exemple 9**

La longueur de la courbe paramétrée par la fonction  $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$  du point  $M(0) = (1, 0)$  au point  $M(2\pi) = (1, 0)$  est égale à

$$L_f(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

On retrouve le périmètre du cercle trigonométrique.

**ATTENTION**

La terminologie « longueur de la courbe du point  $M(a)$  au point  $M(b)$  » peut être trompeuse dans certains cas. Par exemple, la longueur de la courbe paramétrée par  $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$  du point  $M(0) = (1, 0)$  au point  $M(4\pi) = (1, 0)$  est égale à

$$L_f(0, 4\pi) = \int_0^{4\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} dt = \int_0^{4\pi} 1 dt = 4\pi,$$

tandis que le périmètre du cercle est seulement de  $2\pi$ . Cette différence provient du fait que lorsque la variable  $t$  décrit l'intervalle  $[0, 4\pi]$ , le point  $M(t)$  effectue deux fois le tour du cercle trigonométrique.

De manière plus précise, la formule de la définition donne la longueur du chemin parcouru par le point  $M(t)$  lorsque la variable  $t$  décrit l'intervalle  $[a, b]$ .

### Définition (Abscisse curviligne)

L'abscisse curviligne de la courbe paramétrée par  $f$  d'origine  $t_0 \in I$  est la fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| \, du = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} \, du.$$

### Remarques 8

- L'abscisse curviligne représente donc la longueur algébrique de la courbe entre les points  $M(t_0)$  et  $M(t)$ .
- Imaginons que l'on puisse dérouler la courbe sans l'étirer (comme une corde) de telle sorte que l'on obtienne une droite : le nombre  $\varphi(t)$  représente alors l'abscisse du point  $M(t)$  relativement à l'origine et l'orientation choisie ; d'où le terme d'abscisse curviligne.

**Exemple 10**

L'abscisse curviligne d'origine 0 de la courbe paramétrée par  $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$  est la fonction

$$\varphi : t \mapsto \int_0^t \sqrt{(-\sin(u))^2 + (\cos(u))^2} du = \int_0^t 1 du = t.$$

Par définition, l'abscisse curviligne  $\varphi$  d'origine  $t_0$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . De plus, comme la courbe paramétrée par  $f$  est régulière, on a

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = \|f'(t)\| > 0.$$

Par des théorèmes de première année, on en déduit que  $\varphi$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $J = \varphi(I)$  et que son application réciproque  $\varphi^{-1} : J \rightarrow I$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$ .

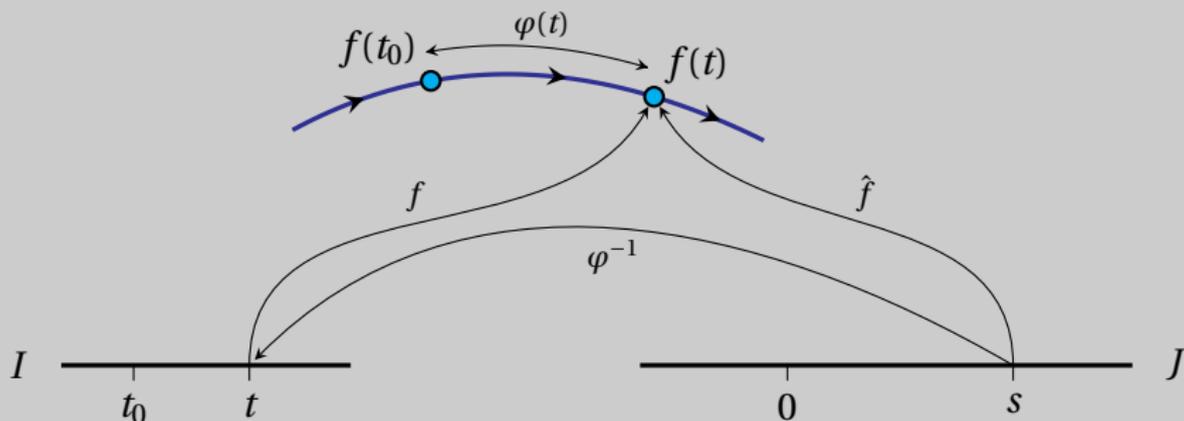
L'application  $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un nouveau paramétrage de la courbe.

### Définition (Paramétrage par l'abscisse curviligne)

L'application  $\hat{f}$  construite ci-dessus s'appelle un paramétrage par l'abscisse curviligne.

## Illustration

En posant  $s = \varphi(t)$ , on peut résumer la situation avec le graphique suivant.



**Remarques 9**

- a) En pratique, on pose  $s = \varphi(t)$  et on considère que toute fonction  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  de la variable  $t$  est aussi une fonction de la variable  $s$  via  $t = \varphi^{-1}(s)$ . En particulier, la formule de dérivation d'une composée donne

$$\frac{dh}{ds} = \frac{dt}{ds} \times \frac{dh}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} \times \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\|f'(t)\|} \times \frac{dh}{dt}.$$

- b) En tout point, le vecteur  $\frac{df}{ds}$  est de norme 1. En effet, d'après la formule précédente, on a

$$\frac{df}{ds} = \frac{1}{\|f'(t)\|} \times \frac{df}{dt} = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} \implies \left\| \frac{df}{ds} \right\| = 1.$$

Dans cette partie, on considère que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Comme la courbe paramétrée  $f$  est régulière, on peut définir pour tout  $t \in I$  les vecteurs

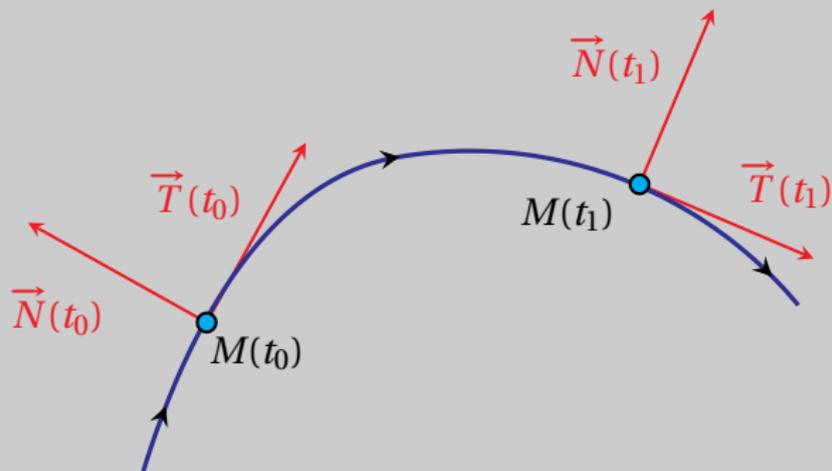
$$\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

### Définition (Repère de Frenet)

Le repère orthonormé direct  $(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$  s'appelle le repère de Frenet de la courbe paramétrée au point  $M(t)$ .

## Illustration

On représente ci-dessous le repère de Frenet en deux points d'une courbe paramétrée régulière.



**Remarques 10**

- a) Le repère de Frenet est un objet géométrique : il ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe, mais uniquement de l'orientation de la courbe.
- b) Pour tout  $t \in I$ , le vecteur  $\vec{T}(t)$  dirige la tangente à la courbe en  $M(t)$ .
- c) Pour tout  $t \in I$ , le vecteur  $\vec{N}(t)$  dirige la normale à la courbe en  $M(t)$ .

Par définition du repère de Frenet, on a la relation

$$\forall t \in I, \quad \left\langle \vec{T}(t) \mid \vec{T}(t) \right\rangle = \left\| \vec{T}(t) \right\|^2 = 1.$$

Comme on a supposé que  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  dans cette partie, la fonction vectorielle  $\vec{T}$  est dérivable. En dérivant la relation précédente, on obtient que

$$\forall t \in I, \quad \left\langle \frac{d\vec{T}}{dt}(t) \mid \vec{T}(t) \right\rangle = 0.$$

Finalement, en utilisant la relation  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \times \frac{d\vec{T}}{dt}$ , on aboutit à

$$\forall t \in I, \quad \left\langle \frac{d\vec{T}}{ds}(t) \mid \vec{T}(t) \right\rangle = 0.$$

On en déduit que les vecteurs  $\frac{d\vec{T}}{ds}(t)$  et  $\vec{N}(t)$  sont colinéaires pour tout  $t \in I$ , ce qui nous permet de considérer la définition suivante.

### Définition (Courbure)

La courbure de  $f$  est la fonction  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}$ .

### Remarques 11

- La courbure géométrique  $|\gamma(t)|$  de la courbe paramétrée au point  $M(t)$  est une notion géométrique : elle ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe.
- La courbure algébrique  $\gamma(t)$  de la courbe paramétrée au point  $M(t)$  est une notion géométrique : elle ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe, mais uniquement de l'orientation de la courbe.

## Exemples 11

- a) La courbure de toute droite  $\mathcal{D}$  du plan est nulle. En effet, si on considère un point  $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$  et un vecteur directeur  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  de  $\mathcal{D}$ , alors la droite  $\mathcal{D}$  est courbe régulière paramétrée par

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + at \\ y_0 + bt \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a par un calcul direct que

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \frac{ds}{dt}(t) = \|f'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**Exemples 11**

a) De plus, on a avec la formule de dérivation d'une composée que

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \times \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dt}{ds} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\vec{N},$$

donc la courbure  $\gamma$  de la droite est nulle.

**Exemples 11**

- b) La courbure de tout cercle du plan est constante et égale (au signe près) à l'inverse du rayon du cercle. En effet, le cercle de centre  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et de rayon  $R > 0$  est paramétré par

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + R \cos(t) \\ y_0 + R \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a par un calcul direct que

$$\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt}(t) = \|f'(t)\| = R.$$

**Exemples 11**

b) De plus, on a avec la formule de dérivation d'une composée que

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \times \frac{d\vec{T}}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} \times \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{R} \times \vec{N}(t),$$

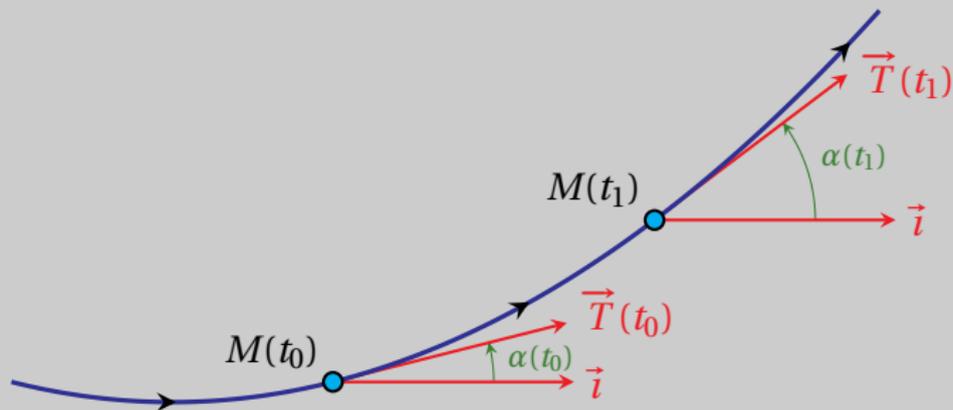
donc la courbure  $\gamma$  est constante de valeur  $1/R$ .

Comme pour tout  $t \in I$  le vecteur  $\vec{T}(t)$  est unitaire, on peut écrire

$$\forall t \in I, \quad \exists \alpha(t) \in \mathbb{R}, \quad \vec{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}.$$

### Illustration

Pour tout  $t \in I$ , le nombre  $\alpha(t)$  est une mesure de l'angle orienté  $(\vec{i}, \vec{T})$ .



## Formules de Frenet

Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\forall t \in I, \quad \vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

alors on a les relations

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \vec{T}, \quad \frac{d\alpha}{ds} = \gamma.$$

## Remarques 12

- a) L'existence de l'application  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  est assurée par le théorème du relèvement (hors-programme).

## Remarques 12

b) La troisième formule de Frenet nous permet d'interpréter géométriquement la courbure.

- La courbure est positive si et seulement si la fonction  $\alpha$  est croissante.

Dans ce cas, la courbe « tourne à gauche (selon l'orientation choisie du plan euclidien) ».

- La courbure est négative si et seulement si la fonction  $\alpha$  est décroissante.

Dans ce cas, la courbe « tourne à droite (selon l'orientation choisie du plan euclidien) ».

- Plus la courbure est grande en valeur absolue, plus la variation de  $\alpha$  est rapide : la courbe « prend un virage serré ». A contrario, plus la courbure est petite en valeur absolue, plus la variation de  $\alpha$  est lente : la courbe « prend un virage ample ».

**Exemple 12**

En reprenant l'exemple précédent sur le cercle, on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$  que

$$\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha(t) = t + \frac{\pi}{2}.$$

En utilisant la troisième formule de Frenet, on retrouve la courbure du cercle

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{dt}{ds} \times \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{R} \times 1 = \frac{1}{R}.$$

### Définition (Point birégulier)

On dit qu'un point  $M(t)$  de la courbe est birégulier si  $\gamma(t) \neq 0$ .

### Remarque 13

En admettant la formule (hors-programme) suivante

$$\forall t \in I, \quad \gamma(t) = \frac{\det(f'(t), f''(t))}{\|f'(t)\|^3},$$

on en déduit qu'un point  $M(t)$  de la courbe est birégulier si et seulement si les vecteurs  $f'(t)$  et  $f''(t)$  ne sont pas colinéaires.

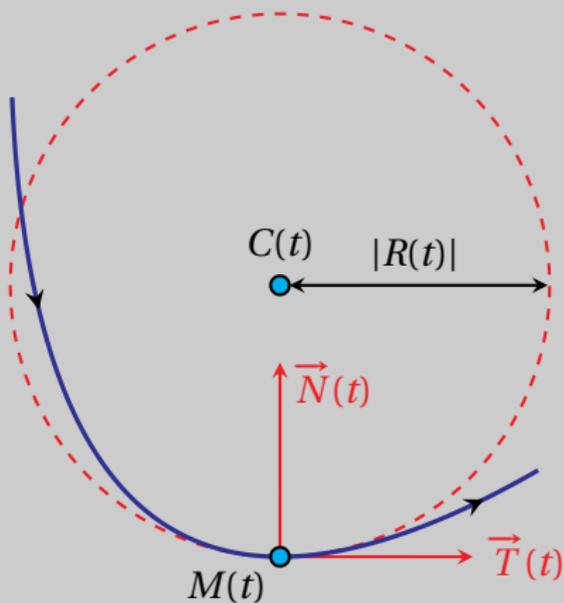
### Définition (Cercle de courbure)

Soit  $M(t)$  un point birégulier de la courbe.

- (i) On appelle rayon de courbure au point  $M(t)$  le nombre  $R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$ .
- (ii) On appelle centre de courbure au point  $M(t)$  le point  $C(t)$  défini par la relation  $C(t) = M(t) + R(t)\vec{N}(t)$ .
- (iii) On appelle cercle de courbure (ou cercle osculateur) au point  $M(t)$  le cercle de centre  $C(t)$  et de rayon  $|R(t)|$ .

**Remarque 14**

On peut démontrer que le cercle de courbure au point  $M(t)$  est le cercle qui épouse le mieux la courbe au point  $M(t)$ . On peut observer cette propriété sur l'exemple ci-dessous.



**Définition (Courbe birégulière)**

La courbe paramétrée par  $f$  est dite birégulière si tous ses points sont biréguliers.

**Définition (Développée d'une courbe birégulière)**

La développée d'une courbe birégulière du plan est l'ensemble des centres de courbures.

On considère une famille de droites  $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$  définies chacune par la donnée d'un point  $A(t) \in \mathbb{R}^2$  et d'un vecteur directeur  $\vec{u}(t) \in \mathbb{R}^2$ . Autrement dit, si  $M$  est un point du plan, on a

$$M \in \mathcal{D}_t \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{A(t)M} = \lambda \vec{u}(t) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, M = A(t) + \lambda \vec{u}(t). \quad (*)$$

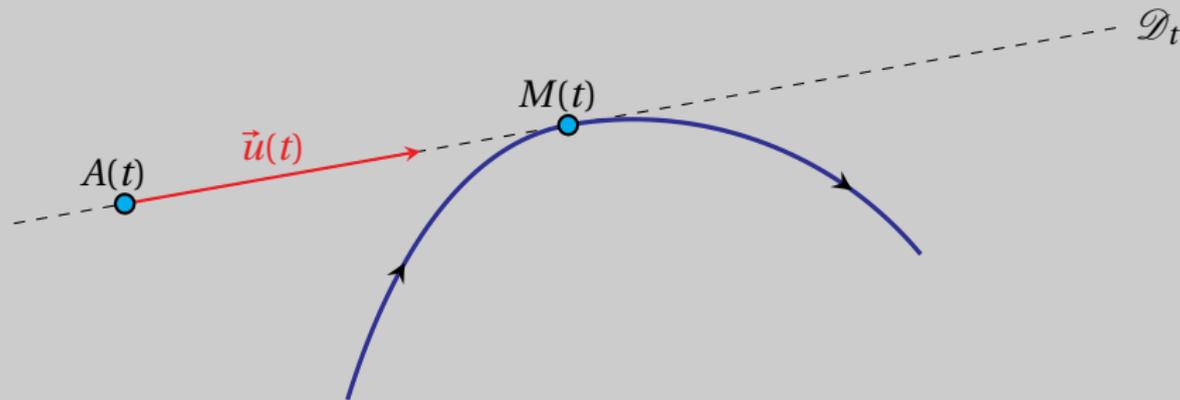
On suppose que les applications  $A: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\vec{u}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ .

**Définition (Enveloppe d'une famille de droites)**

On appelle enveloppe de la famille de droites  $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$  toute courbe paramétrée  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $\mathcal{D}_t$  soit la tangente à la courbe au point  $f(t)$  pour tout  $t \in I$ .

**Illustration**

Pour tout  $t \in I$ , la situation doit être comme sur le graphique suivant.



Nous allons étudier une méthode permettant de déterminer une enveloppe de la famille  $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$ . Si la courbe paramétrée par  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une enveloppe de la famille  $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$ , alors  $M(t) \in \mathcal{D}(t)$  pour tout  $t \in I$  par définition, donc on obtient par (\*) que

$$\forall t \in I, \quad \exists \lambda(t) \in \mathbb{R}, \quad f(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t).$$

Cherchons une enveloppe sous cette forme en supposant de plus que la fonction  $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Pour tout  $t \in I$ , on souhaite que  $\mathcal{D}_t$  soit la tangente à la courbe au point  $f(t)$  pour tout  $t \in I$ , donc les vecteurs  $f'(t)$  et  $\vec{u}(t)$  sont nécessairement colinéaires pour tout  $t \in I$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{E}}(f'(t), \vec{u}(t)) = 0 &\Leftrightarrow \det_{\mathcal{E}}(A'(t) + \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det_{\mathcal{E}}(A'(t), \vec{u}(t)) + \lambda'(t)\det_{\mathcal{E}}(\vec{u}(t), \vec{u}(t)) + \lambda(t)\det_{\mathcal{E}}(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det_{\mathcal{E}}(A'(t), \vec{u}(t)) + \lambda(t)\det_{\mathcal{E}}(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = 0. \end{aligned}$$

Si  $\det_{\mathcal{E}}(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ , on conclut que

$$\lambda(t) = -\frac{\det_{\mathcal{E}}(A'(t), \vec{u}(t))}{\det_{\mathcal{E}}(\vec{u}'(t), \vec{u}(t))}. \quad (\spadesuit)$$

Réciproquement, si  $\det_{\mathcal{L}}(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ , on peut vérifier que l'application

$$f: t \mapsto A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t) \quad \text{avec} \quad \lambda(t) = -\frac{\det_{\mathcal{L}}(A'(t), \vec{u}(t))}{\det_{\mathcal{L}}(\vec{u}'(t), \vec{u}(t))}$$

est une enveloppe de la famille de droites  $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$ .

### Remarque 15

On ne retiendra pas (♠) par cœur : on la retrouvera comme ci-dessus dans chaque exercice.

**Exemple 13**

Déterminons l'enveloppe de la famille  $(\mathcal{D}_t)_{t \in ]0, 2\pi[}$  où  $\mathcal{D}_t$  est la droite passant par les points

$$A(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{et} \quad B(t) = (\cos(2t), \sin(2t)).$$

Chacune des droites  $\mathcal{D}_t$  passe par le point  $A(t)$  et est dirigée par le vecteur

$$\vec{u}(t) = \overrightarrow{A(t)B(t)} = \begin{pmatrix} \cos(2t) - \cos(t) \\ \sin(2t) - \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Par un calcul direct, on a

$$\det_{\mathcal{C}}(A'(t), \vec{u}(t)) = \begin{vmatrix} -\sin(t) & \cos(2t) - \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(2t) - \sin(t) \end{vmatrix} = 1 - \cos(t),$$

$$\det_{\mathcal{C}}(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = \begin{vmatrix} -2\sin(2t) + \sin(t) & \cos(2t) - \cos(t) \\ 2\cos(2t) - \cos(t) & \sin(2t) - \sin(t) \end{vmatrix} = 3\cos(t) - 3.$$

**Exemple 13**

Comme la seconde quantité est non nulle pour tout  $t \in ]0, 2\pi[$ , on en déduit par la formule (♠) que

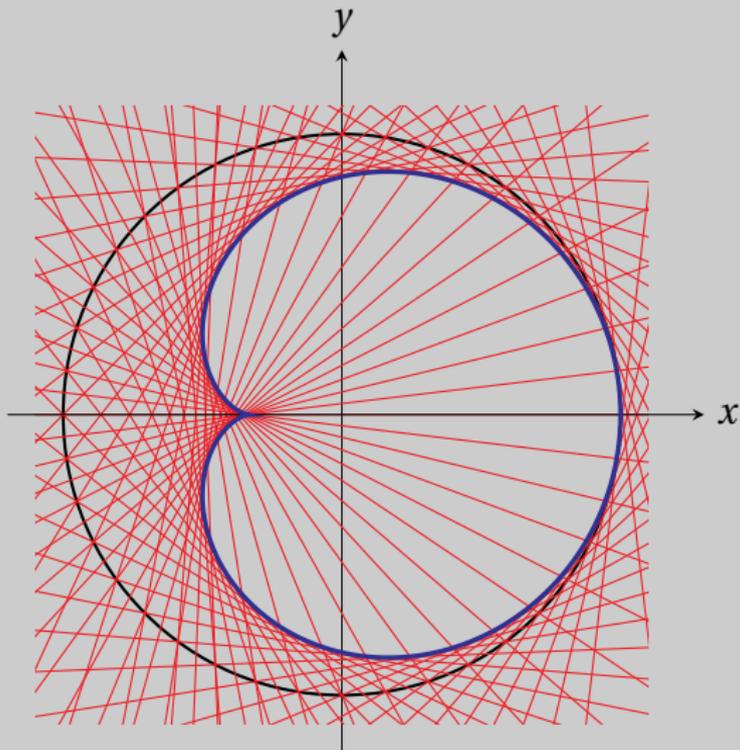
$$\lambda(t) = -\frac{1 - \cos(t)}{3 \cos(t) - 3} = \frac{1}{3}$$

et finalement, on obtient que l'enveloppe de la famille de droites est la courbe paramétrée par  $f : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  où

$$\forall t \in ]0, 2\pi[, \quad f(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cos(t) + \cos(2t) \\ 2 \sin(t) + \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

**Exemple 13**

On peut représenter la famille de droite et son enveloppe sur la figure ci-dessous.



**Théorème (Caractérisation de la développée)**

La développée d'une courbe birégulière est l'enveloppe des normales à la courbe.

**Exemple 14**

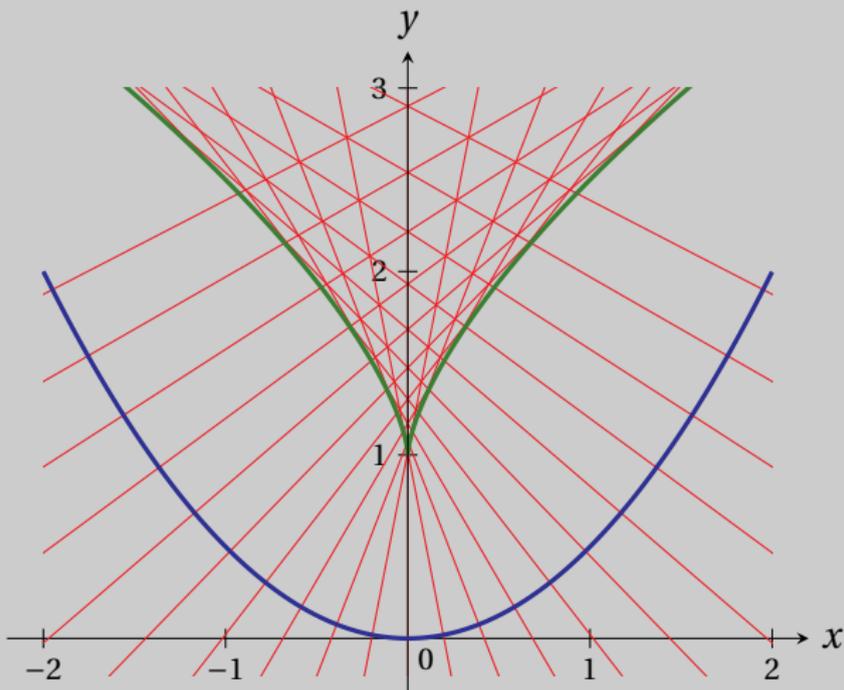
Déterminons la développée de la courbe paramétrée régulière  $f : t \mapsto \left( t, \frac{t^2}{2} \right)$  en déterminant l'enveloppe des normales à la courbe. Notons  $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$  la famille des normales à la courbe paramétrée par  $f$  : la droite  $\mathcal{D}_t$  passe par le point  $A(t) = M(t)$  et elle est dirigée par le vecteur  $\vec{u}(t) = (-t, 1)$ .

Comme  $\det_{\mathcal{E}}(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) \neq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on en déduit par () que la développée de la courbe paramétrée par  $f$  est

$$g : t \mapsto A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t) = \left( -t^3, \frac{3}{2}t^2 + 1 \right).$$

**Exemple 14**

On peut représenter la courbe paramétrée  $f$  et sa développée  $g$  sur la figure ci-dessous.



Dans cette partie, nous allons étudier le point de vue dual de celui exposé dans les parties précédentes : nous allons étudier les courbes planes définies par une équation.

Dans la suite, on considère une application  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  définie sur un ouvert non vide  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ .

### Définition (Courbe plane implicite)

La courbe plane implicite d'équation cartésienne  $g(x, y) = 0$  est l'ensemble des points  $(x, y) \in U$  vérifiant  $g(x, y) = 0$ .

### Exemples 15

- Si  $\mathcal{C}$  est la courbe représentative d'une application  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , alors  $\mathcal{C}$  est la courbe d'équation  $y - h(x) = 0$ .
- Le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et de rayon  $R > 0$  est la courbe d'équation  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$ .

**Remarques 16**

- a) Cette définition est un peu trop générale, mais elle a le mérite d'être simple et on s'en contentera à notre niveau. Par exemple, si on considère la fonction  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ , alors la courbe implicite d'équation  $g(x, y) = 0$  est réduite au seul point  $(0, 0)$ , ce qui n'est pas très satisfaisant pour une courbe.
- b) Une courbe peut être décrite par différentes équations cartésiennes. Par exemple la droite d'équation  $x + y = 0$  admet aussi  $(x + y)^2 = 0$  comme équation cartésienne.

**Définition (Point régulier)**

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation  $g(x, y) = 0$ . Un point  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$  est dit régulier si

$$\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0).$$

Dans le cas contraire, on dit que le point  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$  est singulier.

**Remarques 17**

- a) On admet que l'on peut démontrer, à l'aide du théorème des fonctions implicites (hors-programme), que si  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$  est un point régulier de la courbe, alors  $\mathcal{C}$  est le support d'une courbe paramétrée au voisinage du point  $(x_0, y_0)$ . Plus précisément, il existe un voisinage ouvert  $\tilde{U} \subset U$  de  $(x_0, y_0)$  et une courbe paramétrée régulière  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que

$$\forall (x, y) \in \tilde{U}, \quad \left( (x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists t \in I, (x, y) = f(t) \right).$$

D'après les parties précédentes, on en déduit que la courbe  $\mathcal{C}$  admet une tangente au point  $(x_0, y_0)$ .

**Remarques 17**

- b) On peut également démontrer la réciproque (hors-programme) : si  $f(t_0)$  est un point régulier d'une courbe paramétrée par  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , alors on peut localement la décrire avec une équation cartésienne. Plus précisément, il existe un voisinage ouvert  $\tilde{I} \subset I$  de  $t_0$ , un voisinage ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$  de  $f(t_0)$  et une fonction  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\forall (x, y) \in U, \quad (\exists t \in \tilde{I}, \quad (x, y) = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad g(x, y) = 0).$$

- c) En pratique, on sait passer d'un point de vue à l'autre dans certains cas particuliers (droites, cercles,...), mais c'est un problème difficile dans le cas général.

**Théorème (Tangente en un point régulier)**

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe implicite d'équation  $g(x, y) = 0$ .

Si  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$  est un point régulier de la courbe  $\mathcal{C}$ , alors la courbe  $\mathcal{C}$  admet une tangente en  $(x_0, y_0)$  dont un vecteur normal est  $\nabla g(x_0, y_0)$ .

**Remarque 18**

Si le point  $M(x_0, y_0)$  est un point régulier de la courbe d'équation  $g(x, y) = 0$ , on en déduit une équation cartésienne de la tangente  $\mathcal{T}$  en  $(x_0, y_0)$  avec les équivalences

$$\begin{aligned} A(x, y) \in \mathcal{T} &\Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{MA} \mid \nabla g(x_0, y_0) \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

**Exemple 16**

On considère la courbe plane  $\mathcal{C}$  d'équation cartésienne

$$\underbrace{(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 y^3}_{g(x,y)} = 0.$$

On remarque que  $g(1, 1) = 0$ , donc le point  $M$  de coordonnées  $(1, 1)$  appartient à  $\mathcal{C}$ . Étudions l'existence d'une tangente à  $\mathcal{C}$  au point  $M$ . La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 6x(x^2 + y^2 - 1)^2 - 2xy^3 \\ 6y(x^2 + y^2 - 1)^2 - 3x^2 y^2 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 16**

En particulier, on obtient que

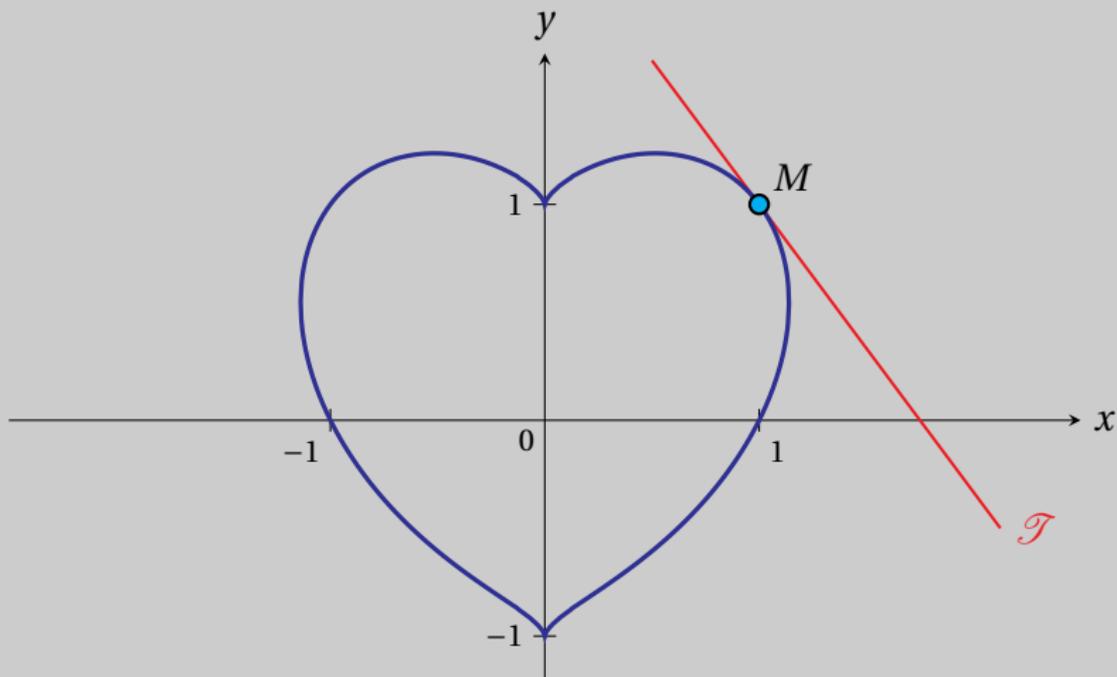
$$\nabla g(1, 1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^2},$$

donc  $M$  est un point régulier de la courbe  $\mathcal{C}$ . On en déduit que  $\mathcal{C}$  admet une tangente  $\mathcal{T}$  au point  $M$  dont un vecteur normal est  $\nabla g(1, 1)$ . Une équation cartésienne de  $\mathcal{T}$  est

$$\left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \middle| \nabla g(1, 1) \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 3y - 7 = 0.$$

**Exemple 16**

On peut représenter la courbe et sa tangente sur le graphique ci-dessous.



**ATTENTION**

Dans l'exemple précédent, le vecteur  $\nabla g(0,0)$  est nul, mais le point  $(0,0)$  n'est pas pour autant un point singulier de  $\mathcal{C}$ , car il n'appartient pas à la courbe.

**Définition (Ligne de niveau)**

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . L'ensemble des points  $(x, y) \in U$  vérifiant la relation  $g(x, y) = \lambda$  est appelé ligne de niveau  $\lambda$  de l'application  $g$ .

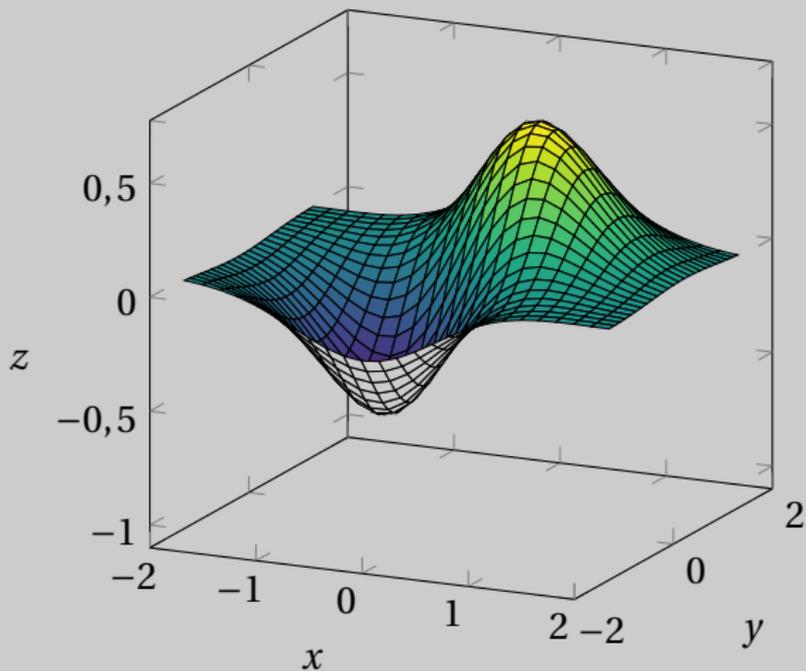
**Exemple 17**

On considère l'application  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$g: (x, y) \mapsto (x + y) \exp(-x^2 - y^2).$$

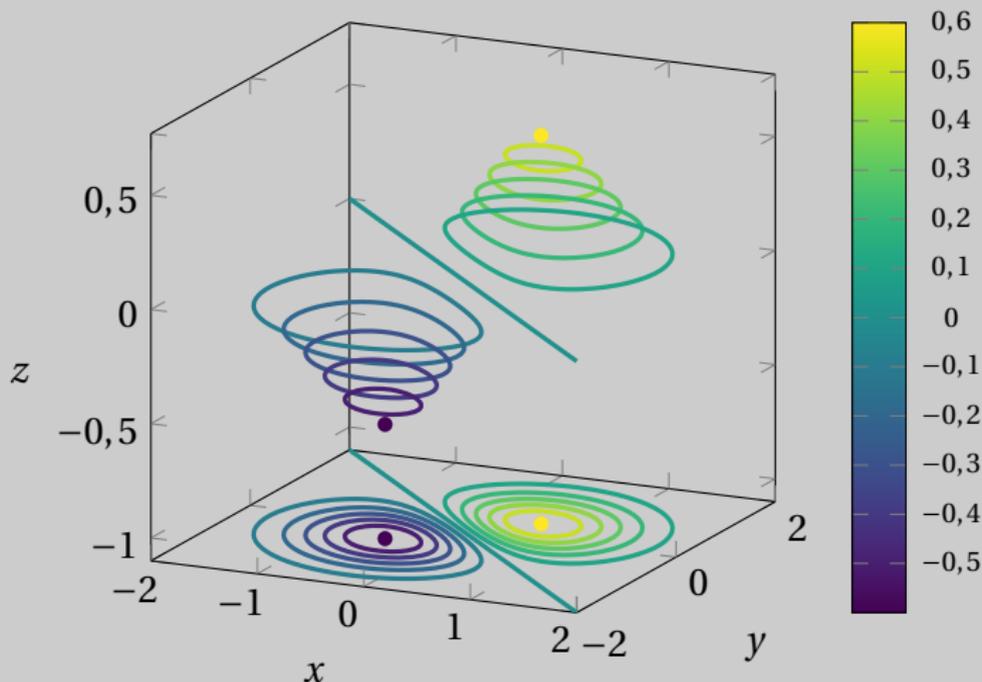
**Exemple 17**

On peut tracer la surface représentative de la fonction  $g$ .



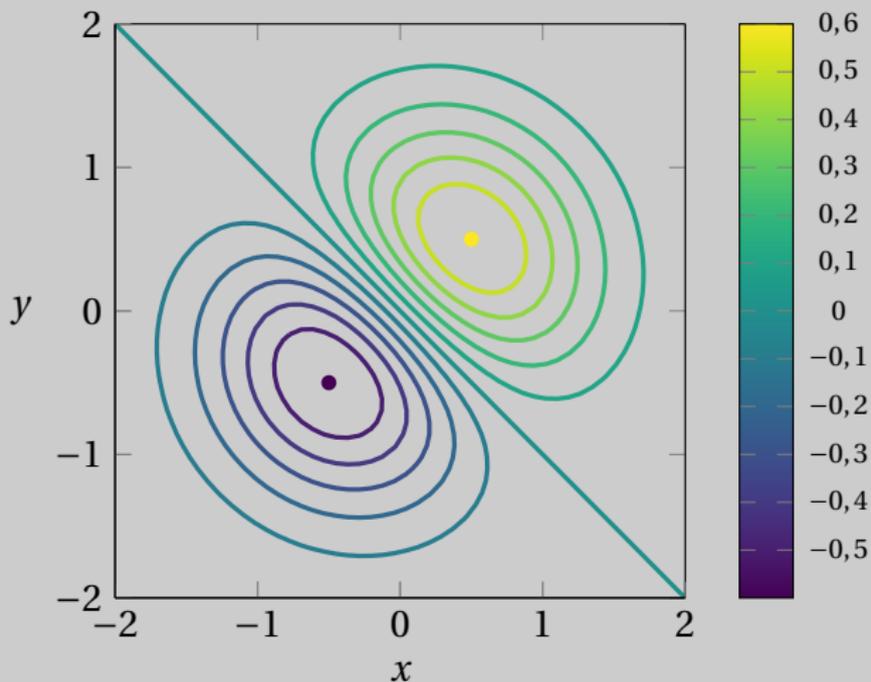
**Exemple 18**

On peut tracer les lignes de niveau de la fonction  $g$  dans l'espace.



**Exemple 17**

On peut tracer les lignes de niveau de la fonction  $g$  dans le plan.



**Remarques 19**

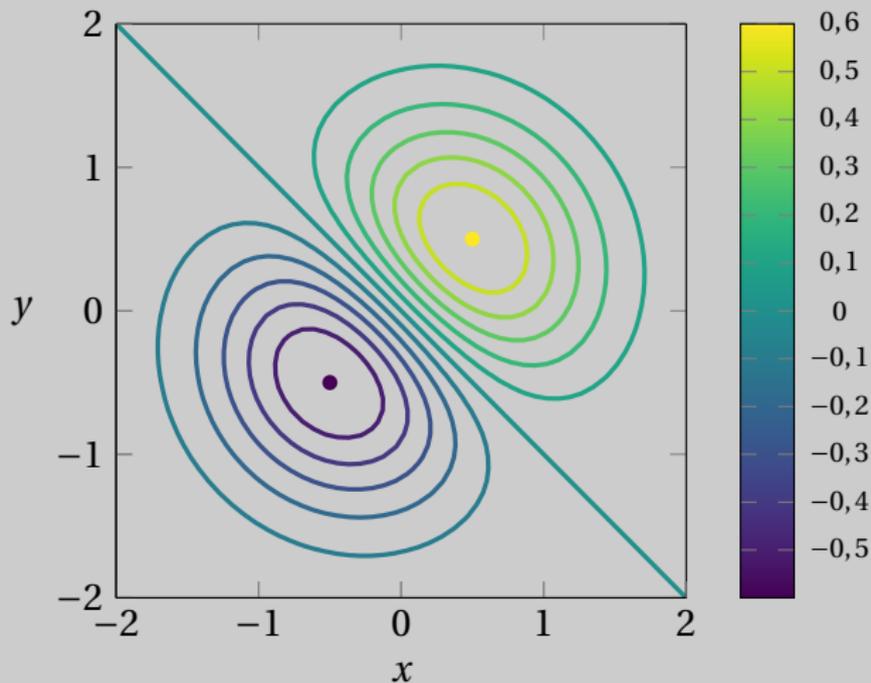
- a) Les lignes de niveau sont utilisées sur les cartes topographiques. L'altitude est constante le long de chacune des lignes sur ces dernières, ce qui permet de représenter le relief.
- b) On retrouve également les lignes de niveau sur les cartes de pression atmosphérique utilisées en météorologie. La pression est constante le long de chacune des lignes sur ces dernières. Dans ce contexte, les lignes de niveau sont appelées les isobares.

**Proposition 1**

Le gradient de  $g$  est orthogonal aux lignes de niveau de  $g$  et il est orienté dans le sens des valeurs croissantes de  $g$ .

**Exemple 18**

On peut placer quelques vecteurs gradients sur les lignes de niveau de l'exemple précédent.



**Exemple 18**

On peut placer quelques vecteurs gradients sur les lignes de niveau de l'exemple précédent.

