TD 10 Courbes planes

Dans tous les exercices, on considère un plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie I Révisions - Géométrie plane

Exercice 1 : Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique de chacune des droites suivantes.

(i) La droite $\mathscr{D}_1$ passant par $A(2,3)$ et dirigée par $\vec{u}(2,1)$.

(ii) La droite $\mathscr{D}_2$ passant par $A(-1,3)$ et $B(2,1)$.

(iii) La droite $\mathscr{D}_3$ passant par $A(2,1)$ dont un vecteur normal est $\vec{n}(-2,3)$.

Exercice 2 : On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $2x+3y=1$.

1. Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite orthogonale à $\mathscr{D}$ passant le point $A(1,1)$.
2. Calculer la distance du point A à la droite $\mathscr{D}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$.

Exercice 3 : On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $x+y=3$ et l'ensemble du plan $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $x^2+y^2-4x+2y+1=0$.

1. Déterminer la nature géométrique de $\mathscr{C}$.
2. Déterminer la nature de l'intersection entre $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.
3. Déterminer l'intersection entre $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.

Exercice 4 : Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ la nature de l'ensemble du plan $\mathscr{C}_m$ d'équation cartésienne $x^2+y^2-4x+2y=m$.

Partie II Courbe planes paramétrées

Exercice 5 : On considère la courbe paramétrée par $f : t \mapsto (\mathrm{ch}(t), \mathrm{sh}(t))$.

1. Montrer que la courbe admet une tangente dont on précisera une équation cartésienne en chacun de ses points.
2. Étudier les branches infinies de la courbe paramétrée.

Exercice 6 : On considère la courbe paramétrée par $f : t \mapsto (3t^2, 2t^3)$.

1. Étudier les branches infinies de la courbe paramétrée.
2. Montrer que la courbe admet une tangente dont on précisera une équation cartésienne en chacun de ses points.
3. Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à cette courbe.
4. Déterminer l'orthoptique de la courbe, i.e. l'ensemble des points du plan par lesquels passent deux tangentes à la courbe orthogonales entre elles.

Exercice 7 : On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & (t+1)\exp(t) \\ y(t) & = & t^2 \exp(t). \end{array} \right.$$

1. Montrer que la courbe admet un unique point stationnaire.
2. Tracer la courbe paramétrée au voisinage de ce point.
3. Étudier les branches infinies de la courbe.

Exercice 8 : Pour chacune des fonctions d'une variable réelle ci-dessous, étudier les branches infinies de sa courbe représentative.

$$(i)\ h : t \mapsto \frac{t^3+1}{t^2-3t+2}, \qquad (ii)\ h : t \mapsto \sqrt{t^2+2t+4}.$$

Exercice 9 : Pour chacune des courbes paramétrées ci-dessous, déterminer ses points d'inflexions et préciser une équation de la tangente en ces points.

$$(i)\ f : t \mapsto (\mathrm{e}^t, t^2), \qquad (ii)\ f : t \mapsto ((t-2)^3, t^2-4).$$

Exercice 10 : Tracer la courbe paramétrée par f dans les cas suivants.

$$(i)\ f : t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2}\right) \qquad (ii)\ f : t \mapsto \big(2\cos(2t), \sin(3t)\big).$$

Exercice 11 - Lemniscate de Bernoulli : On considère la courbe paramétrée par

$$f : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right).$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Comparer les points $M(1/t)$ et $M(t)$.
2. Sur quelle intervalle peut-on réduire l'étude de f ?
3. Tracer la courbe paramétrée par f.

Exercice 12 - Folium de Descartes : On considère la courbe paramétrée par

$$f : t \mapsto \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right).$$

1. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Comparer les points $M(1/t)$ et $M(t)$.
2. Sur quelle intervalle peut-on réduire l'étude de f ?
3. Tracer la courbe paramétrée par f.
4. Montrer qu'une équation cartésienne de la courbe est $x^3 + y^3 = 3xy$.

Exercice 13 - Strophoïde droite : On considère la courbe paramétrée par

$$f : t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, t\frac{1-t^2}{1+t^2}\right).$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f.
2. Soit $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels t_1, t_2 et t_3 pour que les points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ soient alignés.

Partie III Propriétés métriques des courbes planes

Exercice 14 : On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 3t^2 - 1 \\ y(t) & = & 3t^3 - t. \end{array}\right.$$

1. Déterminer le point double de la courbe.
2. Calculer la longueur de la boucle de la courbe.

Exercice 15 : On considère la fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $h : t \mapsto t\sqrt{t}$. Calculer la longueur de la courbe représentative de h.

Exercice 16 : On considère la courbe paramétrée par $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}^2$ où

$$\forall t \in]0, \pi[, \quad \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos^2(t) + \ln(\sin(t)) \\ y(t) & = & \sin(t)\cos(t). \end{array}\right.$$

Calculer la longueur de cette courbe entre ses deux points de rebroussement.

Exercice 17 : On considère les courbes paramétrées par

$$f : t \mapsto \big(2\cos(t), \sin(t)\big) \quad \text{et} \quad g : t \mapsto \big(\cos(t)\sin(2t), \sin(t)\sin(2t)\big).$$

Montrer que les deux courbes ont la même longueur.

Exercice 18 - Spirale logarithmique : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\lambda \neq 1$. On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \lambda^t \cos(t) \\ y(t) & = & \lambda^t \sin(t). \end{array}\right.$$

1. Calculer l'abscisse curviligne d'origine 0 de f.
2. Déterminer le repère de Frenet associé à f.
3. Calculer la courbure de f.
4. Déterminer la développée de f et l'interpréter géométriquement.

Exercice 19 - Chainette : On considère la courbe paramétrée par $t \mapsto \big(t, \text{ch}(t)\big)$.

1. Calculer l'abscisse curviligne d'origine 0 de f.
2. Calculer la courbure de la courbe.
3. Déterminer la développée de la courbe.

Exercice 20 - Astroïde : On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos^3(t) \\ y(t) & = & \sin^3(t). \end{array} \right.$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f.
2. Déterminer la longueur de la courbe.
3. Déterminer le repère de Frenet associé à f sur $]0, \pi/2[$.
4. Déterminer une application $\alpha :]0, \pi/2[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que
$$\forall t \in]0, \pi/2[, \quad \overrightarrow{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$
puis en déduire la courbure de f sur l'intervalle $]0, \pi/2[$.
5. Retrouver le résultat précédent en utilisant un calcul direct.
6. Déterminer la développée de la courbe et l'interpréter géométriquement.
7. Déterminer l'orthoptique de l'astroïde, i.e. l'ensemble des points du plan par lesquels passent deux tangentes de l'astroïde orthogonales entre elles.

Exercice 21 - Ellipse : Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que la développée de l'ellipse paramétrée par $f : t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t))$ est une dilatation de l'astroïde.

Exercice 22 - Cardioïde : On considère la courbe paramétrée par

$$f : t \mapsto \big(2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) + \sin(2t)\big).$$

1. Tracer le courbe paramétrée par f.
2. Calculer la longueur de la courbe.
3. Déterminer la développée de la courbe et l'interpréter géométriquement.

Exercice 23 - Cycloïde : On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & t - \sin(t) \\ y(t) & = & 1 - \cos(t). \end{array} \right.$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Comparer les points $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$.
2. Sur quelle intervalle peut-on réduire l'étude de la courbe paramétrée ?
3. Tracer la courbe paramétrée par f.
4. Calculer la longueur d'une arche de la courbe paramétrée par f.
5. Montrer que la développée d'une arche de la cycloïde est le translaté d'une arche de la cycloïde.

Exercice 24 - Deltoïde : On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) & = & 2\sin(t) - \sin(2t). \end{array} \right.$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f.
2. Montrer que la développée de la courbe peut être obtenue par composition d'une homothétie et d'une rotation.

Exercice 25 - Parabole : Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la parabole paramétrée par

$$f : t \mapsto \left(\frac{t^2}{2p}, t\right).$$

1. Déterminer la courbure de la courbe paramétrée par f.
2. Déterminer la développée de la courbe paramétrée par f.
3. Calculer l'abscisse curviligne d'origine 0 de f.

Exercice 26 : Déterminer les courbes paramétrées régulières de classe $\mathscr{C}^2$ dont la courbure est nulle.

Partie IV Enveloppe d'une famille de droites

Exercice 27 : Déterminer l'enveloppe de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ où $\mathscr{D}_t$ est la droite admettant pour équation cartésienne $(1-t^2)x+2ty=1+t^2$.

Exercice 28 : Déterminer l'enveloppe de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ où $\mathscr{D}_t$ est la droite admettant pour équation cartésienne $(t-2)x+(3t-2t^2)y+t^3=0$.

Exercice 29 : On considère la courbe d'équation $xy=1$. On note A_t et B_t les points de la courbe d'abscisse respective t et $2t$ pour $t\in\mathbb{R}^*$. Déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(A_tB_t)_{t\in\mathbb{R}^*}$.

Exercice 30 : Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on considère les points $P_t(\cos(t),0)$ et $Q_t(0,\sin(t))$. Déterminer l'enveloppe de la famille des médiatrices de $[P_tQ_t]$ pour $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 31 : Soit F un point du plan qui n'est pas sur le cercle trigonométrique.

1. Déterminer l'enveloppe $\mathscr{E}$ de la famille des médiatrices du segment $[MF]$ lorsque M décrit le cercle trigonométrique.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{E}$ est bornée si et seulement si le point F est à l'intérieur du disque trigonométrique.

Partie V Courbes planes implicites

Exercice 32 : Soit $\mathscr{C}$ la courbe plane d'équation cartésienne $x^2-y^2=0$.

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer les points singuliers de $\mathscr{C}$.

Exercice 33 - Ellipse : Soient $a,b>0$. Soit $\mathscr{C}$ la courbe plane d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{C}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathscr{C}$.

Exercice 34 - Hyperbole : Soient $a,b>0$. Soit $\mathscr{C}$ la courbe plane d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{C}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathscr{C}$.

Exercice 35 - Folium de Descartes : Soit $\mathscr{C}$ la courbe plane d'équation

$$x^3+y^3-3xy=0.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{C}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathscr{C}$.

Exercice 36 : Tracer quelques lignes de niveau et placer quelques gradients des applications suivantes.

$$(i)\ g\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & yx^{-1},\end{array}\qquad (ii)\ g\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2-2x.\end{array}$$