# TD 14 Coniques

Dans tous les exercices, on considère un plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$.

## Partie I Les coniques

**Exercice 1 :** Soient $\mathscr{D}$ une droite du plan et $F$ un point n'appartenant pas à $\mathscr{D}$.

1. Montrer que par tout point $M \in \mathscr{P} \setminus (\mathscr{D} \cup \{F\})$ passe une unique conique $\mathscr{C}$ de directrice $\mathscr{D}$ et de foyer $F$.
2. Préciser la nature de $\mathscr{C}$ en fonction de la position de $M$.

**Exercice 2 - Hyperbole équilatère :** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'excentricité d'une hyperbole pour que ses deux asymptotes soient orthogonales.

**Exercice 3 :** Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole du plan $\mathscr{P}$. On considère un point $M$ de $\mathscr{H}$ et on note $H$ et $H'$ ses projetés orthogonaux respectifs sur les asymptotes de $\mathscr{H}$. Montrer que le produit $MH \times MH'$ ne dépend pas du choix du point $M$.

**Exercice 4 :** Soient $A$ et $B$ deux points distincts du plan et soit $I$ le milieu du segment $[AB]$. Déterminer le lieu des points $M$ du plan tels que $MI^2 = MA \times MB$.

**Exercice 5 :** Soient $\mathscr{C}$ une ellipse de centre $O$ dans le plan et $A \in \mathscr{C}$.

1. Montrer qu'il existe exactement deux points distincts $M, N \in \mathscr{C}$ tels que les tangentes à $\mathscr{C}$ en $M$ et en $N$ soient parallèles à la droite $(AO)$.
2. Montrer que l'aire du triangle $AMN$ ne dépend pas du point $A$.

**Exercice 6 - Propriété optique de la parabole :** Soit $\mathscr{C}$ une parabole de foyer $F$ et de directrice $\mathscr{D}$.

1. Montrer que pour tout point $M$ de $\mathscr{C}$, la tangente à $\mathscr{C}$ en $M$ est la médiatrice du segment $[FH]$ où $H$ est le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathscr{D}$.
2. On note $H'$ l'image de $H$ par la symétrie de centre $M$. Montrer que la droite normale à la parabole $\mathscr{C}$ au point $M$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMH'}$.
3. Comment se réfléchit un rayon lumineux se dirigeant sur la parabole dans une direction parallèle à l'axe focal ?

**Exercice 7 - Définition bifocale d'une ellipse :** Soient $F_1$ et $F_2$ deux points distincts du plan. On considère un réel $a > 0$ et on désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M \in \mathscr{P}$ tels que $MF_1 + MF_2 = 2a$.

1. Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ si $2a < F_1F_2$.
2. Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ si $2a = F_1F_2$.
3. On suppose que $2a > F_1F_2$.
   (a) Montrer que $\mathscr{C}$ est une ellipse dont les deux foyers sont $F_1$ et $F_2$.
   (b) Montrer que si l'application $f : I \to \mathscr{P}$, notée $f : t \mapsto M(t)$, est une paramétrisation $\mathscr{C}^1$ de l'ellipse $\mathscr{C}$, alors on a
   $$\forall t \in I, \quad \left\langle f'(t) \,\middle|\, \frac{\overrightarrow{F_1M(t)}}{F_1M(t)} + \frac{\overrightarrow{F_2M(t)}}{F_2M(t)} \right\rangle = 0.$$
   (c) Comment se réfléchit sur l'ellipse un rayon lumineux passant par $F_1$ ?

**Exercice 8 - Définition bifocale d'une hyperbole :** Soient $F_1$ et $F_2$ deux points distincts du plan. On considère un réel $a > 0$ et on désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M \in \mathscr{P}$ tels que $|MF_1 - MF_2| = 2a$.

1. Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ si $2a > F_1F_2$.
2. Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ si $2a = F_1F_2$.
3. Montrer que si $2a < F_1F_2$, alors l'ensemble $\mathscr{C}$ est une hyperbole dont les deux foyers sont $F_1$ et $F_2$.

## Partie II Courbes algébriques planes du second degré

**Exercice 9 :** On munit le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer la nature géométrique et préciser les éventuelles symétries des coniques suivantes.

$(i)$ $x^2+y^2-3x-y+3=0$, $(ii)$ $x^2-y^2+4x+2y+3=0$,

$(iii)$ $2x^2-y^2+4x-4y-1=0$, $(iv)$ $4x^2+y^2+4x-2y-6=0$,

$(v)$ $x^2+2xy+y^2+3x-2y=0$, $(vi)$ $x^2+2xy+y^2-6x-6y+8=0$,

$(vii)$ $13x^2-32xy+37y^2-5=0$, $(viii)$ $x^2+8xy-5y^2-28x+14y+3=0$,

$(ix)$ $3x^2+\sqrt{3}xy-2y^2+14y-4=0$, $(x)$ $x^2+2xy+y^2-2\sqrt{2}x+6\sqrt{2}y=0$.

**Exercice 10 :** Soit $m\in\mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer la nature de la conique $\mathscr{C}_m$ d'équation

$$x^2+y^2+2mxy=1.$$

**Exercice 11 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation

$$2x^2+4xy-y^2-12x+16=0.$$

1. Déterminer la nature de la conique $\mathscr{C}$.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une tangente au point $(2,0)$ et préciser une équation de cette dernière.

**Exercice 12 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(1,0)$ et $B(0,1)$ et on désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des points du plan dont la somme des carrés des distances aux trois côtés du triangle $OAB$ est égale à $1/3$.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est une ellipse.
2. Montrer que l'ellipse $\mathscr{C}$ est tangente aux droites $(OA)$ et $(OB)$.
3. Déterminer une paramétrisation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**Exercice 13 :** On munit le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ unitaire de degré 3.

1. Montrer que l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x,y)$ vérifiant l'équation $P(x)=P(y)$ est la réunion d'une droite et d'une conique $\mathscr{C}$.
2. Montrer que la conique $\mathscr{C}$ est bornée.

**Exercice 14 :** On munit le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer le lieu des centres des cercles tangents à l'axe $(Oy)$ et coupant l'axe $(Ox)$ en deux points $M$ et $N$ tels que $MN=1$.

**Exercice 15 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le point $A$ de coordonnées $(1,0)$, la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y^2+x=1$ et l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation $x^2+2y^2=1$. Pour tout nombre $m\in\mathbb{R}^*$, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y=m(1-x)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Montrer que la droite $\mathscr{D}_m$ coupe la parabole $\mathscr{P}$ en un point $M_m\neq A$ dont on précisera les coordonnées.
2. Montrer que la droite $\mathscr{D}_m$ coupe l'ellipse $\mathscr{E}$ en un point $N_m\neq A$ dont on précisera les coordonnées.
3. Déterminer une équation de la tangente en $M_m$ à la parabole $\mathscr{P}$ et une équation de la tangente en $N_m$ à l'ellipse $\mathscr{E}$.
4. Déterminer le lieu des points d'intersection des deux tangentes précédentes quand $m$ décrit $\mathbb{R}^*$.

**Exercice 16 :** Soit $p>0$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y^2=2px$ et un point $A\in\mathscr{P}$.

1. Montrer qu'il existe un point $Q$ de sorte que pour tout couple $(M,N)\in\mathscr{P}^2$ tel que la droite $(AM)$ est orthogonale à $(AN)$, la droite $(MN)$ passe par $Q$.
2. Déterminer le lieu du point $Q$ lorsque $A$ décrit la parabole $\mathscr{P}$.