Mathématiques

PT

Lycée Couffignal

CHAPITRE 14

Coniques

Plan du chapitre

Introduction

Les coniques sont des courbes du plan dont plusieurs définitions coexistent. Pendant l'antiquité, Euclide, Aristée et Apollonius considèrent qu'une conique est une courbe plane obtenue en intersectant un cone de l'espace avec un plan. Quelques siècles plus tard, au IV^{e} siècle de notre ère, Pappus d'Alexandrie s'intéresse à l'étude des coniques via leur définition monofocale.

Au XVII^{e} siècle, le développement de la géométrie algébrique permet un traitement algébrique des coniques avec leur représentations paramétriques, travail entrepris par Descartes et Pierre de Fermat.

Les coniques interviennent notamment en mécanique : Isaac Newton a démontré au XVII^{e} siècle la relation observée par Johannes Kepler entre les coniques et les trajectoires des planètes.

Dans ce chapitre, nous commencerons par étudier les coniques via leur définition monofocale. Dans une seconde partie, nous nous placerons dans le cadre plus général des courbes algébriques planes du second degré.

Dans tout le chapitre, on considère un plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$.

Partie I Définition monofocale d'une conique

I.A - Généralités

Définition (Conique) : On se donne un point F du plan, une droite $\mathscr{D}$ ne contenant pas F et un réel $e > 0$.
On appelle conique de foyer F, de droite directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité e l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ vérifiant

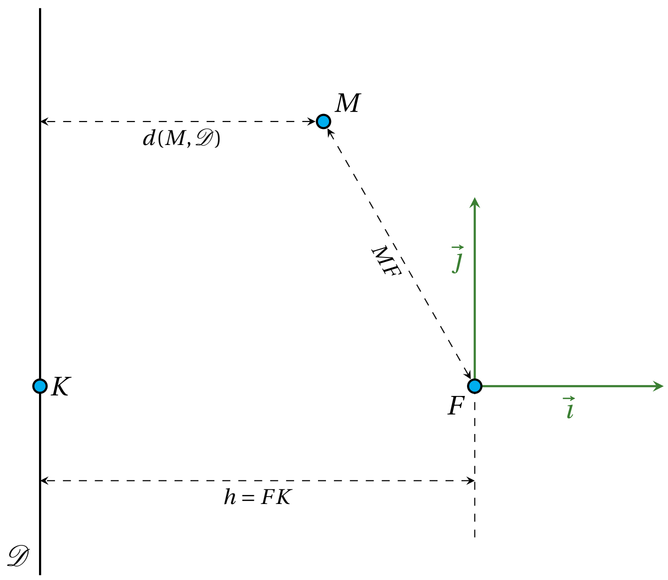
$$MF = e \times d(M, \mathscr{D}).$$

On note $h = d(F, \mathscr{D})$ et on appelle paramètre de la conique le réel $p = eh$.

Dans la suite, on considère une conique $\mathscr{C}$ de foyer F, de droite directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité e. On désigne par K le projeté orthogonal du foyer F sur la droite directrice $\mathscr{D}$.

On considère également le repère orthonormé direct $\left(F, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ avec $\vec{\imath} = \dfrac{1}{h}\overrightarrow{KF}$.

Illustration : On peut représenter la situation avec le graphique suivant.



Dans ce repère, la droite directrice $\mathscr{D}$ admet pour équation cartésienne $x = -h$. Si (x, y) sont les coordonnées d'un point M dans le repère $\left(F, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, alors on a

$$MF = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad d(M, \mathscr{D}) = |x + h|.$$

On en déduit que l'on a l'équivalence $\mathscr{C}$ admet dans le repère $\left(F, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ pour équation cartésienne

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e\,|x + h|.$$

En élevant au carré et en développant, on obtient que l'équation précédente est équivalente à

$$\left(1 - e^2\right) x^2 - 2epx + y^2 = p^2. \tag{$*$}$$

Remarque 1 : On déduit de l'équation cartésienne précédente qu'un point $M(x, y)$ appartient à la conique $\mathscr{C}$ si et seulement si le point $N(x, -y)$ appartient à $\mathscr{C}$. On en déduit que la droite Δ_F passant par le foyer F et orthogonale à la directrice $\mathscr{D}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$. La droite Δ_F est appelé l'axe focal de la conique $\mathscr{C}$.

I.B - Classification des coniques en fonction de l'excentricité

Dans cette partie, on reprend les notations de la partie précédente. Nous allons étudier la nature de la conique $\mathscr{C}$ en distinguant trois cas.

I.B.1 - Cas $e < 1$

Dans cette partie, on suppose que $e < 1$. L'équation $(*)$ se réécrit

$$\left(1 - e^2\right)\left(x - \frac{ep}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{1 - e^2}.$$

On note O le point de coordonnées $\left(\frac{ep}{1 - e^2}, 0\right)$ dans le repère $\left(F, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et on pose

$$a = \frac{p}{1 - e^2} > 0, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} > 0, \qquad c = OF = \frac{ep}{1 - e^2} > 0. \tag{R$_1$}$$

Si on note (X, Y) les coordonnées d'un point M dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ on en déduit qu'une équation cartésienne de la conique $\mathscr{C}$ dans ce nouveau repère est

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

On déduit de l'étude précédente que si l'on se donne deux coniques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'excentricité respective $e_1 \in \,]0, 1[$ et $e_2 \in \,]0, 1[$, alors on peut transformer $\mathscr{C}_1$ en $\mathscr{C}_2$ en utilisant uniquement des isométries et des dilatations. Intuitivement, les coniques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont la même « forme ».

Définition (Ellipse) : Une ellipse est une conique dont l'excentricité e vérifie $e \in \,]0, 1[$.

Remarques 2 :

a) On déduit de l'équation cartésienne précédente qu'un point $M(X, Y)$ appartient à l'ellipse $\mathscr{C}$ si et seulement si le point $N(-X, -Y)$ appartient à $\mathscr{C}$. On en déduit que le point O est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$. On appelle le point O le centre de l'ellipse $\mathscr{C}$.

b) On déduit de l'équation cartésienne précédente qu'un point $M(X, Y)$ appartient à l'ellipse $\mathscr{C}$ si et seulement si le point $N(-X, Y)$ appartient à $\mathscr{C}$. On en déduit que la droite Δ passant par O et parallèle à la directrice $\mathscr{D}$ est un axe de symétrie de l'ellipse.

Définition (Grand / petit axe) : Le nombre $2a$ s'appelle le grand axe de l'ellipse $\mathscr{C}$ et le nombre $2b$ s'appelle le petit axe de l'ellipse $\mathscr{C}$.

Remarques 3 :

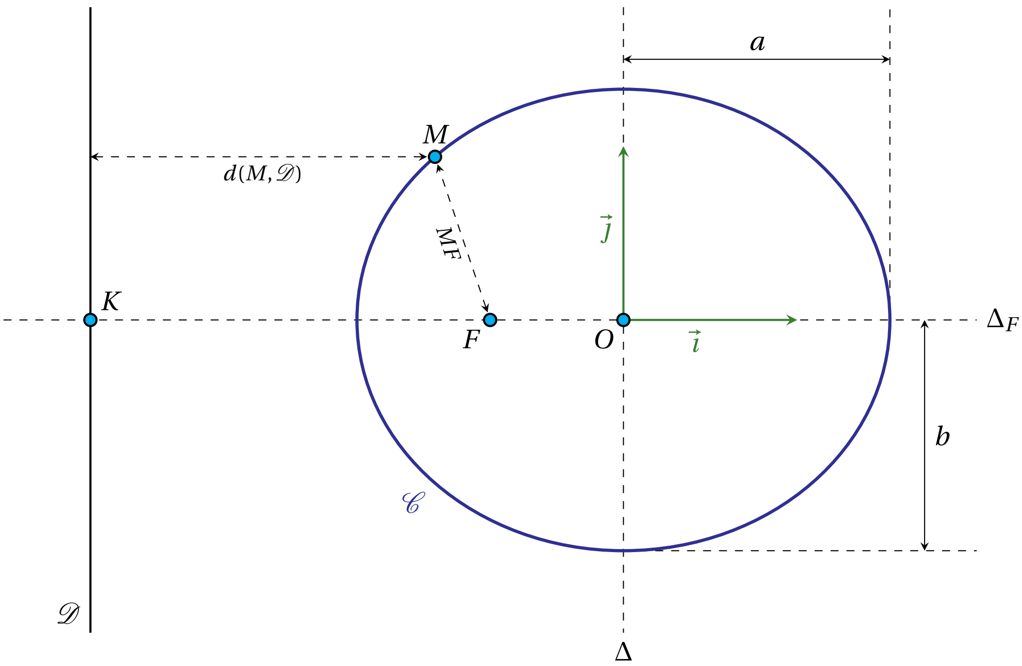
a) Par définition, on a l'inégalité $a > b$.

b) En particulier, on en déduit qu'il n'est pas possible d'obtenir un cercle avec la définition monofocale d'une ellipse (la relation $a = b$ équivaut à $e = 0$ ce qui est exclu par définition).

c) Les points de coordonnées $(\pm a, 0)$ et $(0, \pm b)$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ s'appellent les sommets de l'ellipse.

Proposition 1 : L'ellipse $\mathscr{C}$ est paramétrée dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ par $\left\{\begin{array}{lcl} X(t) & = & a\cos(t) \\ Y(t) & = & b\sin(t) \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Illustration : On peut représenter la situation lorsque $e \in]0,1[$ avec le graphique suivant.



Remarques 4 :

a) Réciproquement, si on se donne un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan $\mathscr{P}$ et un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 < a < b$, alors l'ensemble

$$\mathscr{C} = \left\{ M(x,y) \in \mathscr{P} \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

est une ellipse. En effet, en inversant les relations (R_1), il suffit de poser

$$p = \frac{b^2}{a}, \qquad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}, \tag{$\tilde{\mathrm{R}}_1$}$$

puis de remarquer (en utilisant les calculs précédents) que $\mathscr{C}$ est la conique de foyer $F(-c, 0)$, de directrice la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = -\dfrac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e \in]0,1[$.

b) En utilisant la symétrie par rapport à la droite Δ, on remarque que $\mathscr{C}$ est aussi la conique de foyer $F(c, 0)$, de directrice la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = \dfrac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e \in]0,1[$.

c) Les formules (R_1) et $(\tilde{\mathrm{R}}_1)$ ne sont pas exigibles : elles seront fournies si nécessaire.

I.B.2 - Cas $e > 1$

Dans cette partie, on suppose que $e < 1$. L'équation $(*)$ se réécrit

$$(1-e^2)\left(x-\frac{ep}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{p^2}{1-e^2}.$$

On note O le point de coordonnées $\left(\frac{ep}{1-e^2},0\right)$ dans le repère $\left(F,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ et on pose

$$a=\frac{p}{e^2-1}>0,\qquad b=\frac{p}{\sqrt{e^2-1}}>0,\qquad c=OF=\frac{ep}{e^2-1}>0. \tag{R$_2$}$$

Si on note (X,Y) les coordonnées d'un point M dans le repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ on en déduit qu'une équation cartésienne de la conique $\mathscr{C}$ dans ce nouveau repère est

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

On déduit de l'étude précédente que si l'on se donne deux coniques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'excentricité respective $e_1\in\,]1,+\infty[$ et $e_2\in\,]1,+\infty[$, alors on peut transformer $\mathscr{C}_1$ en $\mathscr{C}_2$ en utilisant uniquement des isométries et des dilatations. Intuitivement, les coniques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont la même « forme ».

Définition (Hyperbole) : Une hyperbole est une conique dont l'excentricité e vérifie $e\in\,]1,+\infty[$.

Remarques 5 :

a) On déduit de l'équation cartésienne précédente qu'un point $M(X,Y)$ appartient à l'hyperbole $\mathscr{C}$ si et seulement si le point $N(-X,-Y)$ appartient à $\mathscr{C}$. On en déduit que le point O est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$. On appelle le point O le centre de l'hyperbole $\mathscr{C}$.

b) On déduit de l'équation cartésienne précédente qu'un point $M(X,Y)$ appartient à l'ellipse $\mathscr{C}$ si et seulement si le point $N(-X,Y)$ appartient à $\mathscr{C}$. On en déduit que la droite Δ passant par O et parallèle à la directrice $\mathscr{D}$ est un axe de symétrie de l'hyperbole.

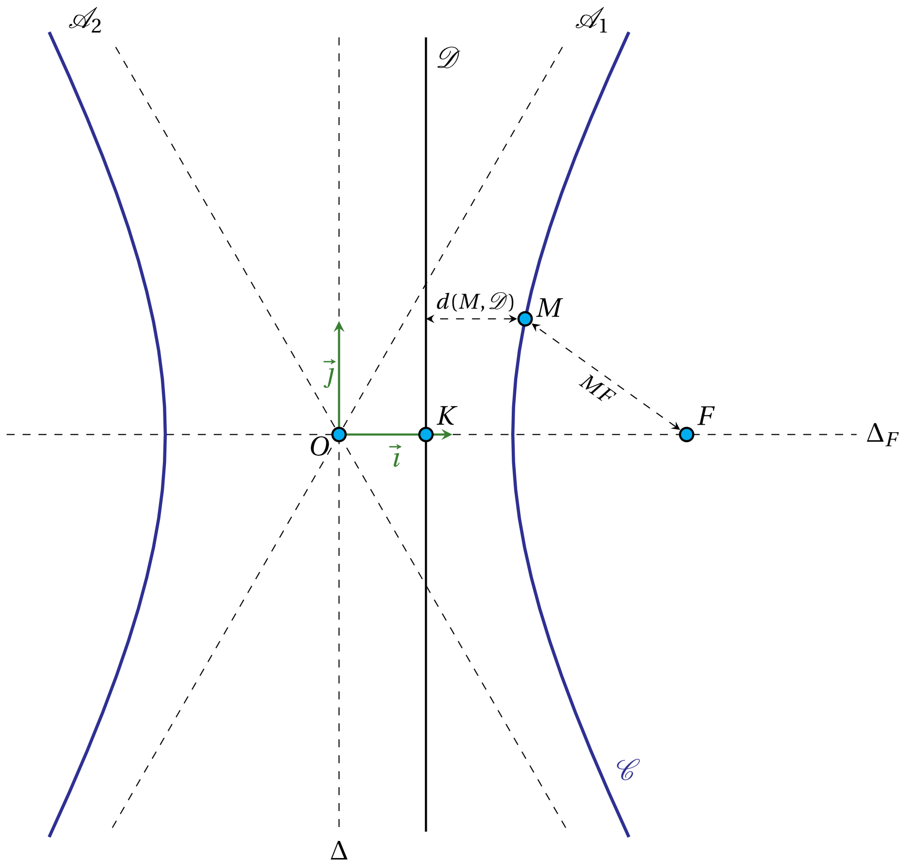
Proposition 2 : L'hyperbole $\mathscr{C}$ est paramétrée dans le repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ par $\begin{cases} X(t) & = & \pm a\,\mathrm{ch}(t) \\ Y(t) & = & b\,\mathrm{sh}(t)\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

Remarque 6 : On observe sur le graphique de la page suivante que l'hyperbole admet deux « morceaux » que l'on appelle les branches de l'hyperbole. Le choix du signe dans le paramétrisation ci-dessus correspond au choix d'une branche de l'hyperbole.

En appliquant les outils développés dans le chapitre sur les courbes paramétrées, on en déduit le résultat suivant sur les branches infinies de l'hyperbole.

Corollaire 1 : L'hyperbole $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ dont des équations cartésiennes respectives dans le repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ sont $Y=\frac{b}{a}X$ et $Y=-\frac{b}{a}X$.

Illustration : On peut représenter la situation lorsque $e \in]1,+\infty[$ avec le graphique suivant.



Remarques 7 :

a) Réciproquement, si on se donne un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan $\mathscr{P}$ et un couple $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, alors l'ensemble
$$\mathscr{C} = \left\{M(x,y) \in \mathscr{P} \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$
est une hyperbole. En effet, en inversant les relations (R_2), il suffit de poser
$$p = \frac{b^2}{a}, \qquad e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}, \qquad c = \sqrt{a^2+b^2}, \tag{$\tilde{\mathrm{R}}_2$}$$
puis de remarquer (en utilisant les calculs précédents) que $\mathscr{C}$ est la conique de foyer $F(c,0)$, de directrice la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = \dfrac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e \in]1,+\infty[$.

b) En utilisant la symétrie par rapport à la droite Δ, on remarque que $\mathscr{C}$ est aussi la conique de foyer $F(-c,0)$, de directrice la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = -\dfrac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e \in]1,+\infty[$.

c) Les formules (R_2) et $(\tilde{\mathrm{R}}_2)$ ne sont pas exigibles : elles seront fournies si nécessaire.

I.B.3 - Cas $e = 1$

Dans cette partie, on suppose que $e = 1$. L'équation $(*)$ se réécrit

$$-2px + y^2 = p^2.$$

On note S le point de coordonnées $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ dans le repère $\left(F, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Si on note (X, Y) les coordonnées d'un point M dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ on en déduit qu'une équation cartésienne de la conique $\mathscr{C}$ dans ce nouveau repère est

$$Y^2 = 2pX.$$

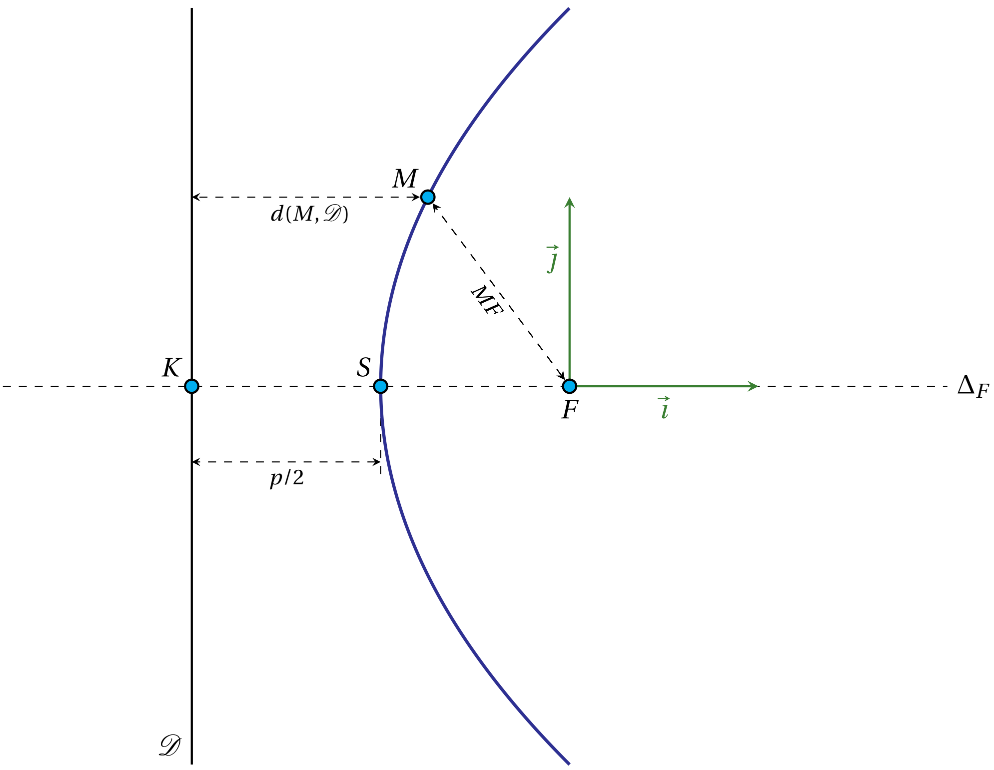
On déduit de l'étude précédente que si l'on se donne deux coniques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'excentricité $e = 1$, alors on peut transformer $\mathscr{C}_1$ en $\mathscr{C}_2$ en utilisant uniquement des isométries et des dilatations. Intuitivement, les coniques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont la même « forme ».

Définition (Parabole) : Une parabole est une conique dont l'excentricité e vérifie $e = 1$.

Remarque 8 : Le point S se trouve sur l'axe focale de la parabole. On appelle S le sommet de la parabole $\mathscr{C}$.

Proposition 3 : La parabole $\mathscr{C}$ est paramétrée dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ par $\begin{cases} X(t) = \dfrac{t^2}{2p} \\ Y(t) = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Illustration : On peut représenter la situation lorsque $e = 1$ avec le graphique suivant.



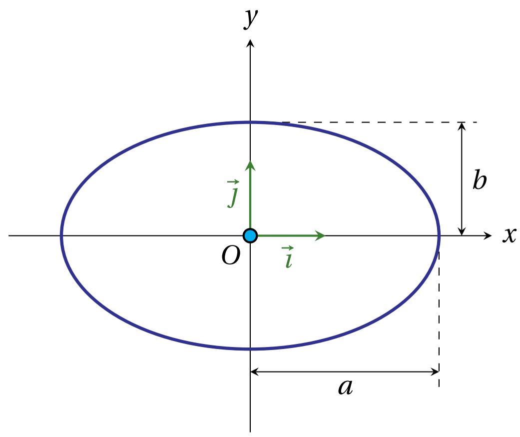
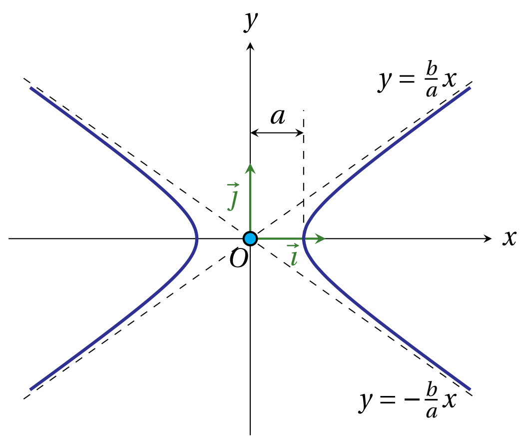
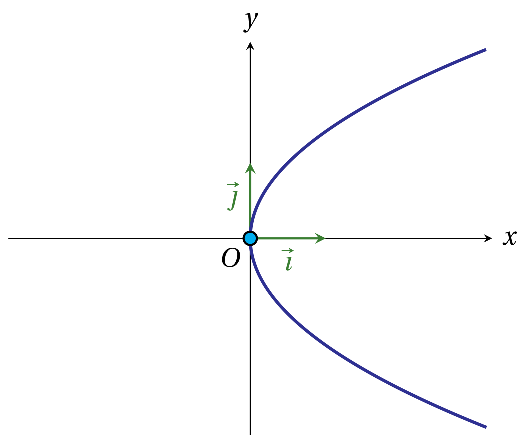
Remarque 9 : Réciproquement, si on se donne un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan $\mathscr{P}$ et un nombre réel $p \in \mathbb{R}_+^*$, alors l'ensemble

$$\mathscr{C} = \left\{ M(x, y) \in \mathscr{P} \;\middle|\; y^2 = 2px \right\}$$

est une parabole. En effet, il suffit de remarquer (en utilisant les calculs précédents) que $\mathscr{C}$ est la conique de foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, de directrice la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = -\frac{p}{2}$ et d'excentricité $e = 1$.

I.C - Bilan

Le tableau ci-dessous résume l'étude effectuée dans la partie précédente.

Nature	**Équation dans un repère adapté**	**Paramétrisation dans un repère adapté**	**Représentation**
Ellipse $(e<1)$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0 \text{ et } b>0)$	$\begin{cases} x(t) & = & a\cos(t) \\ y(t) & = & b\sin(t) \end{cases}$	
Hyperbole $(e>1)$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0 \text{ et } b>0)$	$\begin{cases} x(t) & = & \pm a\,\mathrm{ch}(t) \\ y(t) & = & b\,\mathrm{sh}(t) \end{cases}$	
Parabole $(e=1)$	$y^2=2px$ $(p>0)$	$\begin{cases} x(t) & = & \dfrac{t^2}{2p} \\ y(t) & = & t \end{cases}$	

Partie II Courbes algébriques planes du second degré

Étant donnée un repère orthonormée du plan euclidien $\mathscr{P}$, on appelle courbe algébrique plane du second degré tout ensemble de points $M(x, y)$ vérifiant une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ vérifie $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. On a vu que dans des repères adaptées, les coniques satisfont de telles équations. Dans ce paragraphe, on va démontrer que toutes les courbes du second degré sont des coniques, éventuellement dégénérées (on précisera le sens de ce terme).

Dans la suite, on considère une courbe $\mathscr{C}$ du plan $\mathscr{P}$ dont l'équation dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est

$$\underbrace{ax^2 + bxy + cy^2}_{\text{partie quadratique}} + \underbrace{dx + ey}_{\text{partie linéaire}} + f = 0.$$

On commence par mettre cette équation sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^\top AX + LX + f = 0.$$

Théorème de classification : Soit $\mathscr{C}$ la courbe algébrique du second degré définie par l'équation ci-dessus.

(i) Si $\det(A) > 0$, alors $\mathscr{C}$ est du type ellipse, i.e. $\mathscr{C}$ est une ellipse, un point ou l'ensemble vide.

(ii) Si $\det(A) < 0$, alors $\mathscr{C}$ est du type hyperbole, i.e. $\mathscr{C}$ est une hyperbole ou la réunion de droites sécantes.

(iii) Si $\det(A) = 0$, alors $\mathscr{C}$ est du type parabole, i.e $\mathscr{C}$ est une parabole, la réunion de deux droites parallèles, une droite ou l'ensemble vide.

La démonstration ci-dessous est à savoir reproduire sur des exemples.

DÉMONSTRATION :

Nous allons simplifier l'équation de départ en se plaçant dans un repère orthonormé adéquat.

1) La première étape consiste à éliminer le terme xy en utilisant un changement de repère. Comme A est une matrice symétrique réelle, on en déduit par le théorème spectral qu'il existe $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = P^\top AP = D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathrm{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}.$$

En utilisant le changement de variable $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = PU$, on obtient que

$$\begin{aligned} X^\top AX + LX + f = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (PU)^\top APU + LPU + f = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad U^\top P^\top APU + LPU + f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U^\top DU + LPU + f = 0. \end{aligned}$$

En notant $LP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,2}(\mathbb{R})$, l'équation se réécrit sous la forme

$$\lambda u^2 + \mu v^2 + \alpha u + \beta v + f = 0.$$

Il s'agit de l'équation de la conique $\mathscr{C}$ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est la base orthonormée de vecteurs propres utilisée pour définir la matrice P.

2) Comme $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$, on a en particulier que $\det(A) = \lambda\mu$. Pour continuer, on distingue deux cas.
   a) Si $\det(A) = \lambda\mu \neq 0$, alors l'équation précédente se réécrit

$$\lambda\Big(\underbrace{u + \frac{\alpha}{2\lambda}}_{u'}\Big)^2 + \mu\Big(\underbrace{v + \frac{\beta}{2\mu}}_{v'}\Big)^2 = \underbrace{\frac{\alpha^2}{4\lambda} + \frac{\beta^2}{4\mu} - f}_{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda u'^2 + \mu v'^2 = \omega.$$

   Il s'agit de l'équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où Ω est le point de coordonnées $\left(-\frac{\alpha}{2\lambda}, -\frac{\beta}{2\mu}\right)$ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Pour conclure, on distingue deux sous-cas.
   (i) Supposons que $\det(A) = \lambda\mu > 0$. Quitte à multiplier l'équation ci-dessus par -1, on peut supposer que $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
      - Si $\omega > 0$, l'équation se réécrit $\frac{u'^2}{a^2} + \frac{v'^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$, donc $\mathscr{C}$ est une ellipse.
      - Si $\omega = 0$, la seule solution de l'équation est $(0,0)$. La conique est réduite à un point.
      - Si $\omega < 0$, l'équation n'a pas de solution. La conique est l'ensemble vide.

   (ii) Supposons que $\det(A) = \lambda\mu < 0$. Quitte à multiplier l'équation ci-dessus par -1, on peut supposer que $\lambda > 0$ et $\mu < 0$.
      - Si $\omega \neq 0$, l'équation se réécrit $\frac{u'^2}{a^2} - \frac{v'^2}{b^2} = \pm 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$, donc $\mathscr{C}$ est une hyperbole.
      - Si $\omega = 0$, l'équation se réécrit sous la forme

$$\frac{u'^2}{a^2} - \frac{v'^2}{b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{u'}{a} - \frac{v'}{b}\right)\left(\frac{u'}{a} + \frac{v'}{b}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v' = \frac{b}{a}u' \quad \text{ou} \quad v' = -\frac{b}{a}u'.$$

      Dans ce cas, la conique $\mathscr{C}$ est la réunion de deux droites sécantes.

   b) Si $\det(A) = \lambda\mu = 0$, en supposant que $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$ (le cas symétrique $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$ étant analogue), l'équation précédente se réécrit

$$\lambda\Big(\underbrace{u + \frac{\alpha}{2\lambda}}_{u'}\Big)^2 + \beta \underbrace{v}_{v'} = \underbrace{\frac{\alpha^2}{4\lambda} - f}_{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda u'^2 + \beta v' = \omega.$$

   Il s'agit de l'équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où Ω est le point de coordonnées $\left(-\frac{\alpha}{2\lambda}, 0\right)$ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
   - Si $\beta \neq 0$, on conclut que la conique $\mathscr{C}$ est une parabole.
   - Si $\beta = 0$, l'équation se réécrit $u'^2 = \frac{\omega}{\lambda}$. En fonction du signe du membre de droite, on conclut que $\mathscr{C}$ est l'ensemble vide, une droite ou la réunion de deux droites parallèles.

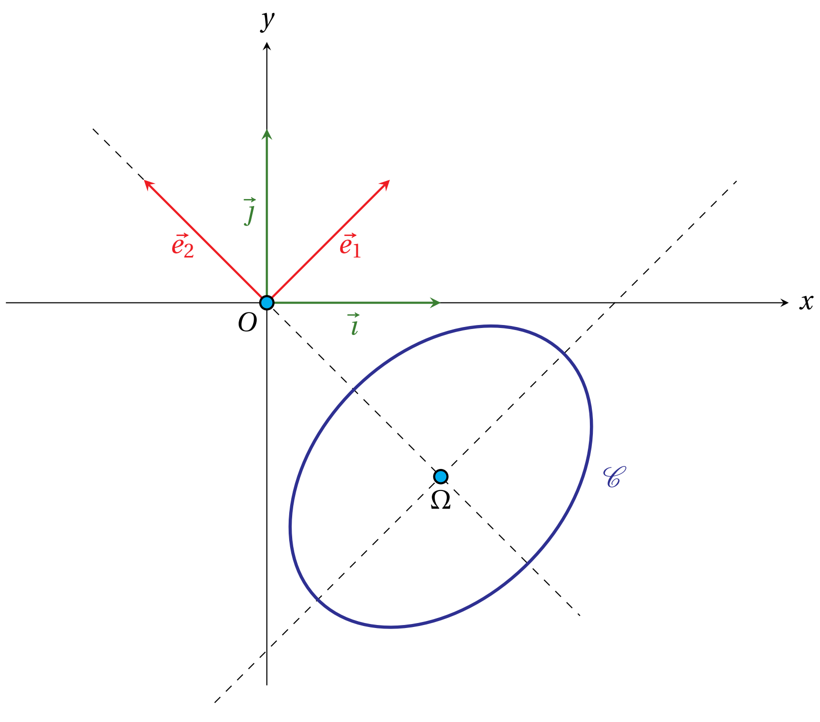
Remarques 10 :

a) On appelle conique dégénérée une courbe algébrique plane du second degré qui n'est pas une ellipse, une hyperbole ou une parabole.
b) Dans le cas d'une ellipse ou d'une hyperbole, on constate que les vecteurs propres de A dirigent des axes de symétries de la conique.
c) Pour une parabole, l'axe de symétrie est dirigé par le vecteur propre de A associée à la valeur propre nulle.

Exemple 1 : Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, l'équation $xy = k$ définit une hyperbole dont les asymptotes sont les axes du repères.

Exemple 2 : On souhaite étudier la conique $\mathscr{C}$ de $\mathscr{P}$ dont l'équation dans le repère orthonormée $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est
$$3x^2-2xy+3y^2-8x+8y+6=0.$$
On commence par réécrire cette équation sous la forme matricielle
$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+6=0.$$
Comme $\det(A)>0$, on sait d'après le théorème de classification que $\mathscr{C}$ est une ellipse, un point ou l'ensemble vide. On obtient par le calcul que les valeurs propres de A sont 2 et 4 et que ses sous-espaces propres sont
$$E_2(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)\quad\text{et}\quad E_4(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right).$$
On en déduit que l'on peut écrire $D=P^{-1}AP$ avec les matrices
$$D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}).$$
Pour obtenir l'équation de la conique $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ et $\vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})$, on effectue le changement de variable $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ dans l'équation de départ. On obtient
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+6=0 \quad&\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}u & v\end{pmatrix}P^{\top}AP\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8 & 8\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}+6=0\\ &\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}u & v\end{pmatrix}D\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 8\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}+6=0\\ &\Leftrightarrow\quad 2u^2+4v^2+8\sqrt{2}v+6=0\\ &\Leftrightarrow\quad u^2+2(v+\sqrt{2})^2=1.\end{aligned}$$
On conclut que la conique $\mathscr{C}$ est une ellipse. Son centre Ω à pour coordonnée $(0,-\sqrt{2})$ dans le repère $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, ce qui correspond à $(1,-1)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On peut tracer la conique $\mathscr{C}$ en utilisant son équation dans le repère $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.



Exemple 3 : On souhaite étudier la conique $\mathscr{C}$ de $\mathscr{P}$ dont l'équation dans le repère orthonormée $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est

$$16x^2-24xy+9y^2+25x-50y=0.$$

On commence par réécrire cette équation sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 16 & -12\\ -12 & 9\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 25 & -50\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=0.$$

Comme $\det(A)<0$, on sait d'après le théorème de classification que $\mathscr{C}$ est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes. Les valeurs propres de A sont 2 et 4 et que ses sous-espaces propres sont

$$E_0(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3\\ 4\end{pmatrix}\right)\quad\text{et}\quad E_{25}(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4\\ 3\end{pmatrix}\right).$$

On en déduit que l'on peut écrire $D=P^{-1}AP$ avec les matrices

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}).$$

Pour obtenir l'équation de la conique $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1=\frac{1}{5}(3\vec{\imath}+4\vec{\jmath})$ et $\vec{e}_2=\frac{1}{5}(-4\vec{\imath}+3\vec{\jmath})$, on effectue le changement de variable $\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}$ dans l'équation de départ. On obtient

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}A\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 25 & -50\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=0 \quad&\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} u & v\end{pmatrix}P^{\top}AP\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 25 & -50\end{pmatrix}P\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} u & v\end{pmatrix}D\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -25 & -50\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow\quad 25v^2-25u-50v=0\\
&\Leftrightarrow\quad u=v^2-2v.
\end{aligned}$$

On conclut que la conique $\mathscr{C}$ est une parabole. Son sommet Ω a pour coordonnée $(-1,1)$ dans le repère $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, ce qui correspond à $(-7/5,-1/5)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On peut tracer la conique $\mathscr{C}$ en utilisant son équation dans le repère $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.