TD 2 Compléments d'algèbre linéaire

Partie I Révisions - Espaces vectoriels

I.A - Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 : On considère $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y=0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de F.

Exercice 2 : On considère $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+t = y+z+t = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F.

Exercice 3 : On considère $F = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}(\exp)$.

Exercice 4 : On considère $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists T \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+T} = u_n\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

I.B - Bases

Exercice 5 : La famille $\mathscr{F}$ ci-dessous est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?

$$\mathscr{F} = \big((1,-1,0,1),(1,1,1,1),(1,0,-1,-1),(0,1,1,1)\big).$$

Exercice 6 : Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, la famille

$$\mathscr{F}_a = \big((1,-1,0),(2,-1,2),(1,0,a)\big)$$

est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 7 : Montrer que la famille $\mathscr{F} = \big(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Décomposer le polynôme 1 dans cette base.

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $P_k = X^k(1-X)^{n-k} \in \mathbb{R}[X]$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Montrer que la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

I.C - Applications linéaires

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x-y-z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 10 : Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(P) = P(0) + P(1).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 11 : Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par

$$f(P) = P + (1-X)P'.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Partie II Révisions - Matrices

Exercice 12 : Déterminer l'inverse des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la puissance n-ième de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 14 : Déterminer le noyau, l'image et le rang des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 : On considère l'application $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad u(P) = P + P'(X+1).$$

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
2. Déterminer la matrice M de u dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.
3. Calculer $\mathrm{Ker}(M - \mathrm{I}_4)$. En déduire $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
4. Calculer $\mathrm{Im}(M - \mathrm{I}_4)$. En déduire $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.

Exercice 17 : On considère l'application $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice de f dans le base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 18 : Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x, y) = (x - 2y, x + 4y).$$

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique $\mathscr{C}$.
2. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B} = \big((2, -1), (1, -1)\big)$.
3. En déduire la matrice de u^n dans la base canonique pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 19 : Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (i, j, k)$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

On pose $u = i + k$, $v = i + j$ et $w = i + j + k$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20 : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme non nul tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie III Révisions - Endomorphismes remarquables

Exercice 21 : On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \text{Vect}\big((1,0,0)\big) \quad \text{et} \quad G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\big\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Déterminer les projecteurs associés à cette somme directe.
3. Déterminer la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 22 : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\text{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Montrer que f est un projecteur et préciser ses caractéristiques.

Exercice 23 : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\text{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Montrer que f est une symétrie et préciser ses caractéristiques.

Exercice 24 : Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\lambda \neq \mu$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$(f - \lambda \text{Id}_E) \circ (f - \mu \text{Id}_E) = 0.$$

1. Montrer que $E = \text{Ker}(f - \lambda\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \mu\text{Id}_E)$.
2. Exprimer avec f les projecteurs associés à la somme directe précédente.

Exercice 25 : Soient $p, q \in \mathscr{L}(E)$ deux projecteurs qui commutent.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E.
2. Déterminer le noyau et l'image de $p \circ q$.

Partie IV Sommes directes et sous-espaces stables

Exercice 26 : On définit $F = \text{Vect}\big((1,0,0,1)\big)$, $G = \text{Vect}\big((1,1,1,1)\big)$ et

$$H_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z, \ \ y = t\}, \quad H_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = -x, \ \ z = -y\}.$$

Étudier si $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \oplus H_1$ et si $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \oplus H_2$.

Exercice 27 : On considère l'ensemble $F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f(\pi/2) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus \text{Vect}(\cos) \oplus \text{Vect}(\sin)$.

Exercice 28 : On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définis par

$$F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}, \qquad G = \{g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid g \text{ est linéaire}\},$$
$$H = \{h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid h \text{ est constante}\}.$$

Montrer que $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 29 : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

On considère également les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} \quad \text{et} \quad D = \text{Vect}\big((1,0,1)\big).$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.
2. Montrer que H et D sont stables par u.
3. Écrire la matrice de u dans une base adaptée à $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.

Exercice 30 : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

On considère également $H = \mathrm{Vect}\big((1,-3,0),(0,1,-1)\big)$ et $D = \mathrm{Vect}\big((3,1,1)\big)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.
2. Montrer que H et D sont stables par u.
3. Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B} = \big((1,-3,0),(0,1,-1),(3,1,1)\big)$.

Exercice 31 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$ l'endomorphisme défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n}[X], \quad u(P) = X^{2n} P\left(\frac{1}{X}\right).$$

On considère également $F = \mathrm{Vect}\left(1, X^2, \ldots, X^{2n}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(X, X^3, \ldots, X^{2n-1}\right)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}_{2n}[X] = F \oplus G$.
2. Montrer que F et G sont stables par u.
3. Écrire la matrice de u dans une base adaptée à $\mathbb{R}_{2n}[X] = F \oplus G$.

Exercice 32 : On considère l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = P'.$$

Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ stables par l'endomorphisme φ.

Exercice 33 : Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer que si u et v commutent, alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Exercice 34 : Montrer qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E commute avec un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par f.

Partie V Trace d'une matrice ou d'un endomorphisme

Exercice 35 : Calculer la trace de $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dans chacun des cas suivants.

$$(i)\ \ u(x,y,z) = (x+y+z, x+z, y+z), \quad (ii)\ \ u(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x).$$

Exercice 36 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la trace de $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}_n[X])$ dans les cas suivants.

$$(i)\ \ u(P) = P + P', \quad (ii)\ \ u(P) = P(X+1) - P(X), \quad (iii)\ \ u(P) = XP' + P(1).$$

Exercice 37 : Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Calculer la trace de l'application $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{C}))$ défini par $\varphi(M) = AM$ pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 38 : Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB - BA = A$. Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{tr}(A^p) = 0$.

Exercice 39 : Montrer que l'ensemble $H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$ est un hyperplan de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 40 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une base $\mathscr{B}$ de E et un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = XY$.
2. En déduire que $u^2 = \mathrm{tr}(u)u$.

Exercice 41 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On considère un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 = \mathrm{Id}_E$. On note

$$p = \frac{1}{3}\left(\mathrm{Id}_E + u + u^2\right).$$

1. Montrer que p est un projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.
2. Montrer que

$$\dim\left(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)\right) = \frac{1}{3}\left(\dim(E) + \mathrm{tr}(u) + \mathrm{tr}\left(u^2\right)\right).$$