Mathématiques
PT
Lycée Couffignal

CHAPITRE 2

Compléments d'algèbre linéaire

Plan du chapitre

Introduction

L'algèbre linéaire est née de l'étude des systèmes linéaires, dont la résolution est motivée par l'introduction de la géométrie analytique par Descartes dans son appendice *La Géométrie* en 1637. Les premiers résultats sont énoncés par Leibniz en 1693 et Maclaurin en 1748 pour les systèmes à deux ou trois inconnues, puis généralisés par Cramer en 1750 avec les formules qui portent aujourd'hui son nom. Ce n'est qu'en 1810 que Gauss présenta la méthode du pivot permettant de résoudre les systèmes linéaires sous forme de tableaux de nombres. Cependant, on en trouve des traces en Chine aux alentours du II^{e} siècle avant notre ère, sous le nom de *Fang cheng* ce qui se traduit littéralement par « la disposition rectangulaire ».

Les tableaux de nombres sont manipulés depuis deux siècles avant notre ère, mais le terme « matrice » est employé pour la première fois par Sylvester en 1850. Les opérations usuelles du calcul matriciel sont définies dans un traité de Cayley publié en 1854 portant sur les transformations géométriques. Cette approche abstraite des opérations sur les matrices est révolutionnaire car l'utilisation des matrices était essentiellement bornée au calcul des déterminants jusque-là.

Au cours du XVIII^{e} siècle, les mathématiciens cherchent à développer un formalisme permettant d'unifier les résultats sur des objets distincts présentant des propriétés communes. Grassmann publie son traité *La théorie de l'extension linéaire* en 1844 dans lequel il introduit la notion d'espace vectoriel de dimension finie afin de calculer des grandeurs géométriques en étant débarrassé des choix de coordonnées. Le fait que la dimension puisse être supérieure à trois fit apparaître quelques réticences de la part de ceux qui considèrent que tout objet mathématique doit avoir une interprétation dans le monde sensible, mais elles se dissipèrent avec le temps. Finalement, Peano donne en 1888 une définition axiomatisée des espaces vectoriels proche de celle que nous utilisons de nos jours.

L'algèbre linéaire est omniprésente dans les différentes disciplines scientifiques, notamment par l'utilisation des matrices et de leurs propriétés. De plus, la notion d'espace vectoriel a par exemple un rôle central en mécanique quantique et dans la théorie des codes utilisée dans les télécommunications.

L'objectif de ce chapitre est principalement d'effectuer quelques rappels d'algèbre linéaire de première année, puis d'introduire quelques nouvelles notions que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$. Tous les espaces vectoriels dans ce chapitre sont considérés sur le corps $\mathbb{K}$.

Partie I Rappels sur les espaces vectoriels

Dans cette partie, on effectue des rappels de première année sur les espaces vectoriels. Dans un soucis de clarté, les notions ne seront pas rappelées dans un ordre logique mathématiquement, mais dans un ordre thématique. Notamment, certains énoncés utiliserons la notion de dimension avant d'en avoir rappelée la définition.

I.A - Généralités

On ne rappelle pas la définition général d'un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. Cette notion permet de généraliser la notion de vecteurs du plan ou de l'espace.

En pratique, on ne démontre jamais qu'un ensemble F muni de deux lois est un espace vectoriel : on démontre que F est un sous-espace vectoriel d'un des espaces vectoriels de référence ci-dessous.

Remarques 1 :

a) Les éléments d'un espace vectoriel s'appellent les vecteurs.
b) Les éléments du corps $\mathbb{K}$ s'appellent les scalaires.

Exemples 1 : Les ensembles suivants munis de leurs lois usuelles sont des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

a) L'ensemble des n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{K}^n$.
b) L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{K}[X]$.
c) L'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, noté $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
d) L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
e) L'ensemble des applications d'un ensemble Ω dans $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{K}^{\Omega}$ ou $\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{K})$.

Notation : On note 0_E le vecteur nul de l'espace vectoriel E.

I.B - Sous-espaces vectoriels

Définition (Sous-espace vectoriel) : Une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si

(i) $0_E \in F$,
(ii) Stabilité par combinaison linéaire : $\forall (u,v) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ u + \lambda v \in F$.

Remarque 2 : La définition ci-dessus est équivalente à imposer que l'ensemble F muni de

(i) la restriction de la loi d'addition $+ : E \times E \to E$ à l'ensemble $F \times F$,
(ii) la loi de multiplication $\times : \mathbb{K} \times E \to E$ à l'ensemble $\mathbb{K} \times F$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exemples 2 :

a) Les parties $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.
b) L'ensemble $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
   - La vecteur nul $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$ est dans F, car $0+0=0$.
   - Si $u = (x,y) \in F$, $v = (x',y') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors le vecteur $u + \lambda v = (x+\lambda x', y + \lambda y') \in F$, car
   $$(x+\lambda x') + (y+\lambda y') = (x+y) + \lambda(x'+y') = 0 + \lambda \times 0 = 0.$$
c) L'ensemble des matrices symétriques $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   - La matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique.
   - Si $(M,N) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on a
   $$(M+\lambda N)^{\top} = M^{\top} + \lambda N^{\top} = M + \lambda N,$$
   donc la matrice $M + \lambda N$ est symétrique.
d) L'ensemble des suites géométriques complexes n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, car la somme de deux suites géométriques n'est plus une suite géométrique en général.

Proposition (Intersection de sous-espaces vectoriels) : L'intersection de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

ATTENTION : En général, la réunion de sous-espaces vectoriels de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 1 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

(i) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et on a $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
(ii) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors on a l'équivalence
$$F = G \quad \Leftrightarrow \quad F \subset G \text{ et } \dim(F) = \dim(G).$$

I.C - Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition (Somme de deux sous-espaces vectoriels) : La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E, noté $F+G$, est le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F+G=\{f+g\in E \mid f\in F,\ \ g\in G\}.$$

Formule de Grassmann : Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors on a

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G).$$

Définition (Somme directe de deux sous-espaces vectoriels) : La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est dite directe si tout vecteur de $F+G$ se décompose de manière unique comme une somme de vecteurs de F et de G, i.e.

$$\forall v\in F+G, \quad \exists!(f,g)\in F\times G, \quad v=f+g.$$

Dans ce cas, la somme de F et G est notée $F\oplus G$.

Proposition (Caractérisation de la somme directe de deux sous-espaces vectoriels) : La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est directe si et seulement si $F\cap G=\{0_E\}$.

Remarque 3 : Pour démontrer l'égalité $F\cap G=\{0_E\}$, comme l'inclusion $\{0_E\}\subset F\cap G$ est toujours vraie, il suffit d'étudier l'inclusion réciproque.

Exemples 3 :

a) Les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et des matrices antisymétriques $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont en somme directe. En effet, si $M\in\mathscr{S}_n(\mathbb{K})\cap\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, alors on a

$$M^\top=M \quad \text{et} \quad M^\top=-M \quad \Rightarrow \quad M=0.$$

b) Le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas en somme directe avec sous-espace vectoriel des matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, car leur intersection contient toutes les matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition (Sous-espaces supplémentaires) : Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont dits supplémentaires si on a $E=F\oplus G$.

Remarques 4 :

a) On dit également que G est un supplémentaire de F dans E.

b) En général, un supplémentaire de F dans E n'est pas unique.

ATTENTION : Il ne faut pas confondre les notions de supplémentaire et de complémentaire. Un supplémentaire de F est un sous-espace vectoriel de E, alors que le complémentaire $E\setminus F$ de F dans E n'est pas un sous-espace vectoriel (car il ne contient pas le vecteur nul 0_E).

Théorème (Caractérisation des sous-espaces vectoriels supplémentaires) : Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont supplémentaires si et seulement si

$$E = F + G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}.$$

De plus, si E est un espace vectoriel de dimension finie, la propriété précédente est équivalente à

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}.$$

Remarque 5 : Pour démontrer l'égalité $E = F + G$, comme l'inclusion $F + G \subset E$ est toujours vraie, il suffit d'étudier l'inclusion réciproque.

Exemple 4 : On a $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

- Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors on peut écrire $M = S + A$ avec $S = \frac{1}{2}\left(M + M^\top\right)$ et $A = \frac{1}{2}\left(M - M^\top\right)$. De plus, on a

$$S^\top = \frac{1}{2}\left(M^\top + M\right) = S \quad \text{et} \quad A^\top = \frac{1}{2}\left(M^\top - M\right) = -A \quad \Rightarrow \quad (S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{K}).$$

- Nous avons déjà vérifié $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \{0\}$ dans l'exemple 3.

Théorème (Existence d'un supplémentaire) : Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors il existe un supplémentaire G de F dans E.

I.D - Familles finies de vecteurs

I.D.1 - Ensemble des combinaisons linéaires

Définition (Ensemble engendré par une famille) : L'ensemble engendré par une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ d'un espace vectoriel E est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, \dots, v_n$, i.e.

$$\operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in E \;\middle|\; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Proposition 1 : Si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille d'un espace vectoriel E, alors $\operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 6 : Cette proposition permet de démontrer rapidement que certaines parties sont des sous-espaces vectoriels.

Exemple 5 : L'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, car

$$F = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

I.D.2 - Familles libres

Définition (Famille libre) : Une famille de vecteurs $(v_1,\dots,v_n)$ d'un espace vectoriel E est dite libre si

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad \lambda_1v_1+\cdots+\lambda_nv_n=0_E \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\cdots=\lambda_n=0.$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(v_1,\dots,v_n)$ est liée.

Remarques 7 :

a) Une famille contenant le vecteur nul est liée.

b) Une famille d'un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.

c) Une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

d) Une famille de vecteurs est liée si et seulement si un vecteur de la famille est combinaison linéaire des autres.

e) Une famille $(v_1,\dots,v_n)$ est libre si et seulement si tout élément de $\text{Vect}(v_1,\dots,v_n)$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $v_1,\dots,v_n$.

Exemples 6 :

a) La famille $\big((1,0,1),(1,1,1),(1,1,0)\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. En effet, soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\lambda_1(1,0,1)+\lambda_2(1,1,1)+\lambda_3(1,1,0)=(0,0,0)\quad\Leftrightarrow\quad(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2)=(0,0,0).$$

On utilise le Pivot de Gauss pour résoudre ce système linéaire.

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3&=&0\\ \lambda_2+\lambda_3&=&0\\ \lambda_1+\lambda_2&=&0\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

b) La famille $\big(X(X-1),X(X-2),(X-1)(X-2)\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$. En effet, soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\lambda_1X(X-1)+\lambda_2X(X-2)+\lambda_3(X-1)(X-2)=0.$$

En évaluant cette expression successivement en $X=0$, $X=1$ et $X=2$, on obtient respectivement que

$$2\lambda_3=0,\quad -\lambda_2=0,\quad 2\lambda_1=0\quad\Leftrightarrow\quad\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

Définition (Famille échelonnée en degré) : Une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ est dite échelonnée en degré si les polynômes de cette famille sont de degrés deux à deux distincts.

Proposition 2 : Toutes famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré est libre.

Exemple 7 : Soit $n\in\mathbb{N}$. La famille $\mathscr{F}=(P_0,\dots,P_n)$ où $P_k=\sum\limits_{i=0}^{k}X^{2i}\in\mathbb{R}[X]$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ est échelonnée en degré, donc $\mathscr{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

I.D.3 - Familles génératrices d'un espace vectoriel

Définition (Famille génératrice) : Une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ d'un espace vectoriel E est dite génératrice si tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_n$, i.e.

$$\forall v \in E, \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Dans ce cas, on dit que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ engendre E.

Remarque 8 : Par définition, une famille $(v_1, \dots, v_n)$ engendre E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.

Exemple 8 : L'ensemble des suites arithmétiques à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Il est engendré par les suites $u : n \mapsto n$ et $v : n \mapsto 1$. En effet, si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors

$$\exists (a, b) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = an + b,$$

ce qui se réécrit $x = au + bv$.

I.D.4 - Bases d'un espace vectoriel

Définition (Base d'un espace vectoriel) : Une base d'un espace vectoriel E est une famille libre et génératrice de vecteurs de E.

Exemples 9 : Certains espaces vectoriels disposent d'une base « simple » que l'on qualifie de canonique.

a) La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est $(e_1, \dots, e_n)$ où pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e_k a pour unique composante non nulle la k-ème qui est égale à 1.
b) La base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n est $(1, X, \dots, X^n)$.
c) La base canonique de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est est $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$ où pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$, la matrice $E_{i,j}$ a pour unique coefficients non nuls celui en position (i, j) qui est égal à 1.

Définition (Coordonnées d'un vecteur dans une base) : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Les coordonnées d'un vecteur $v \in E$ dans une base $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de E sont les uniques scalaires $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ vérifiant

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

De plus, on définit la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Remarques 9 :

a) On ne peut que parler des coordonnées d'un vecteur une fois que l'on a choisi une base.
b) L'ordre des coordonnées d'un vecteur est important : on ne peut pas les permuter.

Exemple 10 : Les coordonnées du polynôme $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}_2[X]$ dans la base $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ sont données par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(P) = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}).$$

I.E - Espaces vectoriels de dimension finie

Définition (Espace vectoriel de dimension finie) : On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie de E.

Théorème de la base extraite : Si $\mathscr{F}$ est famille génératrice finie d'un espace vectoriel E, alors $\mathscr{F}$ contient une sous-famille qui est une base de E.

Remarque 10 : La démonstration est élémentaire et constructive : tant que la famille $\mathscr{F}$ n'est pas libre, on peut retirer un vecteur de $\mathscr{F}$ qui est combinaison linéaire des autres.

Corollaire 1 : Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors E admet une base.

Théorème de la base incomplète : Si $\mathscr{F}$ est famille libre finie d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors on peut compléter $\mathscr{F}$ en une base de E.

Remarque 11 : La démonstration est élémentaire et constructive : tant que la famille $\mathscr{F}$ n'est pas libre, on peut retirer un vecteur de $\mathscr{F}$ qui est combinaison linéaire des autres.

Théorème d'existence de la dimension : Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même cardinal.

Définition (Dimension d'un espace vectoriel) : Si E est un espace vectoriel de dimension finie, la dimension de E, notée $\dim(E)$, est le cardinal d'une base de E.

Remarque 12 : Intuitivement, la notion de dimension formalise le nombre de degrés de liberté pour un vecteur générique dans l'espace vectoriel considéré.

Exemples 11 :

a) L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension n.
b) L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$.
c) L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est de dimension pq.
d) D'après l'exemple 8, le sous-espace vectoriel F des suites arithmétiques à valeurs dans $\mathbb{K}$ est engendré par la famille (u,v) où $u : n \mapsto n$ et $v : n \mapsto 1$. Comme u et v ne sont pas colinéaires, on en déduit que la famille (u,v) est une base de F et que $\dim(F) = 2$.

Théorème 2 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

(i) Si $\mathscr{F}$ est une famille libre de E, alors on a $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leqslant \dim(E)$.
(ii) Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, alors on a $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geqslant \dim(E)$.
(iii) Si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de E vérifiant $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(E)$, alors on a les équivalences

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } E. \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{F} \text{ est une famille libre.} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{F} \text{ est une famille génératrice de } E.$$

Exemples 12 :

a) La famille $\mathscr{F} = \big((1,0,1),(1,1,1),(1,1,0)\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ d'après l'exemple 6.
De plus, on a $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ d'après le résultat ci-dessus.
b) La famille $\mathscr{F} = \big(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2)\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$ d'après l'exemple 6.
De plus, on a $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$, donc $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ d'après le résultat ci-dessus.

Partie II Rappels sur les applications linéaires

Dans cette partie, on effectue des rappels de première année sur les applications linéaire. Comme dans la partie précédente, les notions ne seront pas rappelées dans un ordre logique mathématiquement, mais dans un ordre thématique.

On considère deux espaces vectoriels E et F sur le corps $\mathbb{K}$.

II.A - Généralités

Définition (Application linéaire) : Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ L'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque 13 : Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.

Exemples 13 :

a) L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x+y, y+z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est linéaire. En effet, si on considère les vecteurs $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(u+\lambda v) &= f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') = ((x+\lambda x') + (y+\lambda y'), (y+\lambda y') + (z+\lambda z')) \\ &= (x+y, y+z) + \lambda(x'+y', y'+z') \\ &= f(u) + \lambda f(v). \end{aligned}$$

b) L'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par $f(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est linéaire. En effet, si on considère un couple $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f(P+\lambda Q) = \int_0^1 (P+\lambda Q)(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = f(P) + \lambda f(Q).$$

Comme F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on dispose naturellement d'une structure d'espace vectoriel sur l'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$. Si $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit l'application $f + \lambda g : E \to E$ par

$$\forall v \in E \quad (f+\lambda g)(v) = f(v) + \lambda g(v).$$

Proposition 3 : L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ muni des lois usuelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. De plus, si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel de dimension finie et on a

$$\dim\big(\mathscr{L}(E,F)\big) = \dim(E)\dim(F).$$

Définition (Endomorphisme d'un espace vectoriel) : Un endomorphisme de l'espace vectoriel E est une application linéaire de E dans E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.

Définition (Automorphisme d'un espace vectoriel) : Un automorphisme de l'espace vectoriel E est une application linéaire bijective de E dans E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$.

Théorème 3 : L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ est un groupe, i.e. il vérifie les trois propriétés suivantes.

(i) L'endomorphisme Id_E appartient à $\mathrm{GL}(E)$.

(ii) Pour tout $u \in \mathrm{GL}(E)$, l'endomorphisme $u^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$ et on a $(u^{-1})^{-1} = u$.

(iii) Pour tout $(u, v) \in \mathrm{GL}(E)^2$, on a $u \circ v \in \mathrm{GL}(E)$ et $(u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$.

II.B - Isomorphismes d'espaces vectoriels

Définition (Isomorphisme) : Un isomorphisme est une application linéaire bijective.

Remarque 14 : Si $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E, l'application $\varphi : E \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ pour tout $v \in E$ est un isomorphisme. L'application réciproque de φ est $\varphi^{-1} : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to E$ définie par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \varphi^{-1}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

Autrement dit, une fois que l'on a choisi une base $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de l'espace vectoriel E, ce dernier s'identifie via les coordonnées de ses vecteurs dans la base $\mathscr{B}$ à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, ou plus simplement à $\mathbb{K}^n$.

Proposition 4 : On a les propriétés suivantes.

(i) L'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

(ii) La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.

Théorème (Caractérisation des isomorphismes par les bases) : Si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E, alors une application linéaire $f : E \to F$ est bijective si et seulement si la famille $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ est une base de F.

Définition (Espaces vectoriels isomorphes) : On dit que les espaces vectoriels E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $f : E \to F$.

Théorème (Caractérisation par la dimension) : Deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

II.C - Image et noyau d'une application linéaire

Définition (Noyau d'une application linéaire) : Le noyau d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{x \in E \mid f(x) = 0_F\right\}.$$

Proposition 5 : Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème (Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire) : Une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Remarque 15 : Pour démontrer l'égalité $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, comme l'inclusion $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f)$ est toujours vraie, il suffit d'étudier l'inclusion réciproque.

Exemple 14 : Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(P) = (P(0), P(1), P(2))$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a les équivalences

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(P) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \quad P(0) = P(1) = P(2) = 0.$$

On en déduit que $P \in \mathbb{R}_2[X]$ admet trois racines distinctes, donc $P = 0$. On conclut que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, donc l'application linéaire f est injective.

Définition (Image d'une application linéaire) : L'image d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ y \in F \mid \exists x \in E, \;\; y = f(x) \right\}.$$

Proposition 6 : Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Théorème (Caractérisation de la surjectivité d'une application linéaire) : Une application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Proposition 7 : Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E et si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors on a

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(v_1), \ldots, f(v_n)).$$

Exemple 15 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ défini par $f(P) = P'$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Par la proposition précédente, en considérant la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$, on a

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(1), f(X), \ldots, f(X^n)\right) = \mathrm{Vect}\left(0, 1, 2X, \ldots, nX^{n-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(1, X, \ldots, X^{n-1}\right) = \mathbb{K}_{n-1}[X].$$

II.D - Rang d'une application linéaire

Définition (Rang d'une application linéaire) : Le rang d'une application linéaire $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels de dimension finie est $\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

Remarque 16 : On a l'inégalité $0 \leqslant \mathrm{rang}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$.

Théorème du rang : Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si E est de dimension finie, alors

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rang}(f).$$

Corollaire 2 : Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie vérifiant $\dim(E) = \dim(F)$, alors

$$f \text{ est bijective.} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est injective.} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est surjective.}$$

Exemple 16 : L'application linéaire $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(P) = (P(0), P(1), P(2))$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ est injective d'après l'exemple 14. Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathbb{R}^3)$, on déduit de la proposition ci-dessus que f est un isomorphisme.

II.E - Matrice d'un endomorphisme en dimension finie

Dans cette partie, on suppose que les espaces vectoriels E et F sont de dimension finie.

Étant donnée une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F, vous avez vu en première année que l'on pouvait associer à toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{\dim(F),\dim(E)}(\mathbb{K})$ vérifiant la relation

$$\forall v \in E, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f(v)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v).$$

Nous limiterons les rappels sur cette notion au cas des endomorphismes : ils sont au cœur du programme d'algèbre linéaire de seconde année.

Définition (Matrice d'un endomorphisme dans une base) : Soient $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E)$. La matrice dans la base $\mathscr{B}$ de l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(v_1) & \cdots & f(v_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \quad \text{avec} \quad \forall j \in [\![1,n]\!], \quad f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} v_i.$$

ATTENTION : En général, lorsque l'on considère plusieurs bases de l'espace vectoriel, la matrice de f n'est pas la même dans les différentes bases.

Exemple 17 : On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $f(x,y) = (x-2y, x+4y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f(e_1) & = & e_1 + e_2 \\ f(e_2) & = & -2e_1 + 4e_2. \end{array} \right.$$

La matrice de f dans la base $\mathscr{B}' = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ avec $v_1 = (2,-1)$ et $v_2 = (1,-1)$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f(v_1) & = & 2v_1 + 0v_2 \\ f(v_2) & = & 0v_1 + 3v_2. \end{array} \right.$$

Proposition 8 : Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$.

(i) Pour tout $v \in E$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f + \lambda g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) + \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$.

(iii) On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$.

(iv) L'application f est un automorphisme si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible. Dans ce cas, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^{-1}$.

Remarques 17 :

a) On déduit de la proposition précédente que l'application $\varphi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. De plus, les éléments de $\mathrm{GL}(E)$ correspondent bijectivement avec les éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ via cette isomorphisme.

b) On rappelle que $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On déduit par récurrence de (iii) que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^n\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f\right)^n.$$

Exemples 18 : On reprend l'endomorphisme f et les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ définis dans l'exemple 17.

a) La matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ de l'image par f du vecteur $v = (3, -2) = 3e_1 - 2e_2$ est
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix},$$
donc on a $f(v) = 7e_1 + -5e_2 = (7, -5)$.

b) On peut également utiliser la base $\mathscr{B}'$ pour faire le calcul. On a $v = (3, -2) = v_1 + v_2$, donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(v)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$
donc on a $f(v) = 2v_1 + 3v_2 = (7, -5)$.

c) La matrice de f^2 dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont respectivement
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^2\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\left(f^2\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

d) L'application f est bijective car $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible. De plus, la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont respectivement
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bilan : Une fois que l'on a fixé une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E, nous pouvons donc passer aux objets définis dans le cadre des espaces vectoriels à des objets matriciels. Le tableau ci-dessous résume la correspondance entre ces deux aspects. Nous le compléterons par d'autres lignes durant l'année.

Représentation vectorielle	**Lien**	**Représentation matricielle**
$v \in E$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$f, g \in \mathscr{L}(E)$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
$f(v) \in E$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$MV \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$f + \lambda g$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$M + \lambda N$
$f \circ g$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	MN
f^{-1} avec $f \in \mathrm{GL}(E)$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	M^{-1} avec $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
$v \in \mathrm{Ker}(f)$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$V \in \mathrm{Ker}(M)$
$v \in \mathrm{Im}(f)$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$V \in \mathrm{Im}(M)$
$\mathrm{rang}(f)$	$=$	$\mathrm{rang}(M)$

Nous venons de voir que l'on pouvait associer à un endomorphisme une matrice dans chaque base de l'espace vectoriel ambiant. Pour terminer, nous allons étudier le lien qui existe entre ces différentes matrices d'un même endomorphisme.

Définition (Matrice de passage) : Soient $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ et $\mathscr{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ deux bases de E. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$ est la matrice $P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par
$$P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v'_1 & \cdots & v'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \quad \text{avec} \quad \forall j \in [\![1, n]\!], \quad v'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} v_i.$$

Exemple 19 : On considère la base $\mathscr{B}' = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ avec $v_1 = (2,-1)$ et $v_2 = (1,-1)$. En notant $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{cases} v_1 & = & 2e_1 - e_2 \\ v_2 & = & e_1 - e_2. \end{cases}$$

Proposition 9 : Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

(i) Pour tout $v \in E$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(v)$.

(ii) La matrice $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est inversible et on a $(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Exemples 20 :

a) On reprend les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ défini dans l'exemple 19. D'après la proposition ci-dessus, on a

$$P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = (P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $e_1 = v_1 - v_2$ et $e_2 = v_1 - 2v_2$.

b) La matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ du vecteur $v = (4,3) = 4e_1 + 3e_2$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(v) = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix},$$

donc on a $v = (4,3) = 7v_1 - 10v_2$.

Formule du changement de base : Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}.$$

Exemple 21 : On reprend l'endomorphisme f et les bases définis dans l'exemple 17. En utilisant la formule du changement de base, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

ce qui est cohérent avec les calculs de l'exemple 17.

Définition (Matrices semblables) : Deux matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$.

Remarque 18 : D'après les propriétés précédentes, en notant $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$, on obtient la relation

$$B = PAP^{-1}.$$

On en déduit que deux matrices A et B sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases de E.

II.F - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$.

II.F.1 - Homothéties vectorielles

Définition (Homothétie vectorielle) : On appelle homothétie vectorielle de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ l'endomorphisme h de l'espace vectoriel E défini par $h = \lambda \mathrm{Id}_E$.

Remarques 19 :

a) Autrement dit, pour tout $v \in E$, on a $h(v) = \lambda v$.

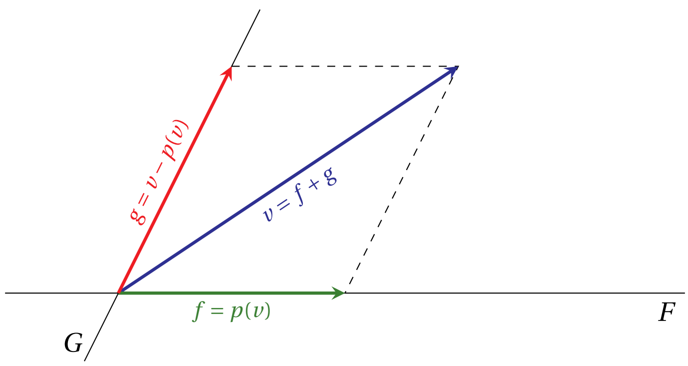
b) Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour toute base $\mathscr{B}$ de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h) = \lambda \mathrm{I}_n$.

II.F.2 - Projecteurs vectoriels

Définition (Projecteur) : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On appelle projecteur sur F parallèlement à G l'endomorphisme $p \in \mathscr{L}(E)$ défini par

$$\forall v \in E, \quad p(v) = f \quad \text{si} \quad v = \underset{\in F}{f} + \underset{\in G}{g}.$$

Illustration : La figure suivante représente géométriquement la projection de $v \in E$ sur F parallèlement à G.



Remarques 20 :

a) Si $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur sur F parallèlement à G, alors on a

$$F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p - \mathrm{Id}_E).$$

b) Si $p \in \mathscr{L}(E)$ est le projecteur sur F parallèlement à G, alors l'endomorphisme $q = \mathrm{Id}_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F.

Théorème (Caractérisation algébrique des projecteurs) : Un endomorphisme $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

Exemples 22 :

a) On considère l'endomorphisme $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = (x+y-z, x+y-z, x+y-z).$$

L'endomorphisme p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$, car pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$p(p(x,y,z)) = p(x+y-z, x+y-z, x+y-z) = (x+y-z, x+y-z, x+y-z) = p(x,y,z).$$

De plus, les éléments caractéristiques du projecteur p sont

$$F = \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Vect}\big(p(1,0,0), p(0,1,0), p(0,0,1)\big) = \operatorname{Vect}\big((1,1,1)\big),$$
$$G = \operatorname{Ker}(p) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\big\} = \operatorname{Vect}\big((1,0,1),(0,1,1)\big).$$

b) On considère l'endomorphisme $p : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ défini par

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad p(M) = \frac{1}{2}\left(M + M^\top\right).$$

L'endomorphisme p est un projecteur de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, car pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$p(p(M)) = \frac{1}{2}\left(p(M) + p(M)^\top\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(M+M^\top\right) + \frac{1}{2}\left(M+M^\top\right)^\top\right) = \frac{1}{2}\left(M+M^\top\right) = p(M).$$

De plus, les éléments caractéristiques du projecteur p sont

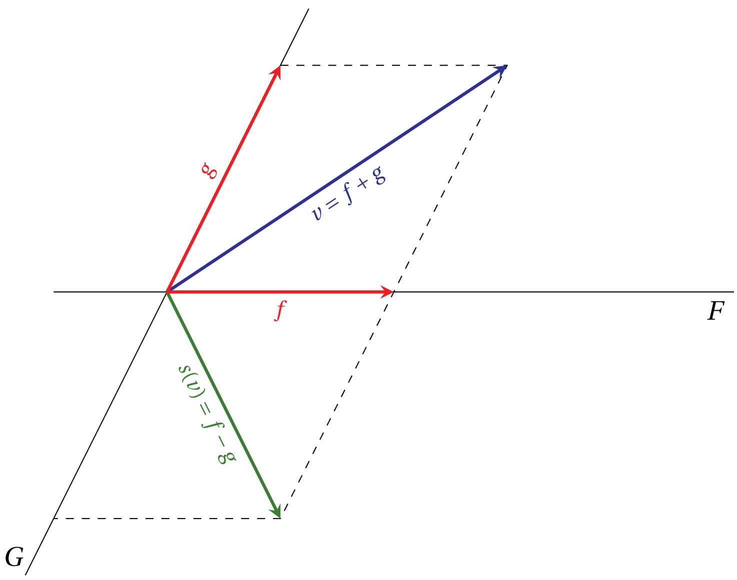
$$F = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}) = \big\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid p(M) - M = 0\big\} = \big\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^\top = M\big\} = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}),$$
$$G = \operatorname{Ker}(p) = \big\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid p(M) = 0\big\} = \big\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^\top = -M\big\} = \mathscr{A}_n(\mathbb{K}).$$

II.F.3 - Symétries vectorielles

Définition (Symétrie) : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme $s \in \mathscr{L}(E)$ défini par

$$\forall v \in E, \quad s(v) = f - g \quad \text{si} \quad v = \underset{\in F}{f} + \underset{\in G}{g}.$$

Illustration : La figure suivante représente géométriquement la symétrie de $v \in E$ par rapport à F parallèlement à G.



Remarques 21 :

a) Si $s \in \mathscr{L}(E)$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors on a

$$F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E).$$

b) Si $p \in \mathscr{L}(E)$ est le projecteur sur F parallèlement à G et $s \in \mathscr{L}(E)$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G alors on a la relation $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Théorème (Caractérisation algébrique des symétries) : Un endomorphisme $s \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Exemple 23 : On considère l'endomorphisme $s : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad s(P) = P(-X).$$

L'endomorphisme s est une symétrie de $\mathbb{K}[X]$, car pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$s(s(P)) = s(P(-X)) = P(-(-X)) = P(X).$$

De plus, les éléments caractéristiques de la symétrie s sont

$$F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid s(P) - P = 0\} = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid P(-X) = P(X)\right\},$$
$$G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid s(P) + P = 0\} = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid P(-X) = -P(X)\right\}.$$

Partie III Compléments d'algèbre linéaire

III.A - Produit d'espaces vectoriels

On considère un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et des espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_m$ sur le corps $\mathbb{K}$. On peut naturellement définir sur l'ensemble produit $E = E_1 \times \cdots \times E_m$ une loi $+ : E \times E \to E$ composante par composante, i.e.

$$\forall \big((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)\big) \in E^2, \quad (x_1, \ldots, x_m) + (y_1, \ldots, y_m) = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m).$$

De même, on peut naturellement définir sur l'ensemble produit $E = E_1 \times \cdots \times E_m$ une loi $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ par

$$\forall \big(\lambda, (x_1, \ldots, x_m)\big) \in \mathbb{K} \times E, \quad \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_m) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m).$$

Proposition 10 : Le produit $E = E_1 \times \cdots \times E_m$ muni des lois définies ci-dessus est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exemples 24 :

a) On retrouve que $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ est naturellement un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

b) L'ensemble $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}$ dispose d'une structure naturelle d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

Proposition 11 : Si $E_1, \ldots, E_m$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors l'espace vectoriel $E_1 \times \cdots \times E_m$ est de dimension finie et on a

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_m) = \sum_{k=1}^{m} \dim(E_k).$$

Remarque 22 : Si $(u_1, \ldots u_p)$ est une base de E_1 et que $(v_1, \ldots, v_q)$ est une base de E_2, alors une base de $E_1 \times E_2$ est

$$\big((u_1, 0_{E_2}), \ldots, (u_p, 0_{E_2}), (0_{E_1}, v_1), \ldots, (0_{E_1}, v_q)\big).$$

III.B - Somme de sous-espaces vectoriels

Définition (Somme de sous-espaces vectoriels) : La somme de sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_m$ d'un espace vectoriel E, noté $F_1 + \dots + F_m$, est le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F_1 + \dots + F_m = \{v_1 + \dots + v_m \in E \mid \forall i \in [\![1, m]\!],\ \ v_i \in F_i\}.$$

Définition (Somme directe de sous-espaces vectoriels) : La somme de sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_m$ d'un espace vectoriel E est dite directe si tout vecteur de $F_1 + \dots + F_m$ se décompose de manière unique comme une somme de vecteurs des sous-espaces vectoriels F_i, i.e.

$$\forall v \in F_1 + \dots + F_m, \quad \exists!(v_1, \dots, v_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, \quad v = v_1 + \dots + v_m.$$

Dans ce cas, la somme de $F_1, \dots, F_m$ est notée $F_1 \oplus \dots \oplus F_m$.

Exemple 25 : Trois droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$ sont en somme directe si et seulement si elles ne sont pas coplanaires.

Proposition (Caractérisation de la somme directe) : La somme de sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_m$ d'un espace vectoriel E est directe si et seulement si le vecteur nul se décompose de manière unique comme une somme de vecteurs des sous-espaces vectoriels F_i, i.e.

$$\forall (v_1, \dots, v_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, \quad v_1 + \dots + v_m = 0_E \quad \Rightarrow \quad v_1 = \dots = v_m = 0_E.$$

Proposition 12 : Soient $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Si $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_m$, alors la concaténation de bases des espaces vectoriels $F_1, \dots, F_m$ est une base $\mathscr{B}$ de E.

Remarque 23 : On en déduit que si la somme des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_m$ est directe, alors on a

$$\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_m) = \dim(F_1) + \dots + \dim(F_m).$$

Définition (Base adaptée à une décomposition en somme directe) : Avec les notations de la proposition précédente, on dit que $\mathscr{B}$ est une base de E adaptée à la décomposition en somme directe $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_m$.

III.C - Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition (Sous-espace vectoriel stable) : Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est dit stable par un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ si $f(F) \subset F$, i.e.

$$\forall v \in F, \quad f(v) \in F.$$

Exemples 26 :

a) Les sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E sont stables par tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$.

b) Les sous-espaces vectoriels stables d'une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\pi/2$ sont $\{(0,0)\}$ et $\mathbb{R}^2$.

c) Les sous-espaces vectoriels stables d'une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\pi/2$ sont $\{(0,0,0)\}$, l'axe de la rotation D, le plan vectoriel orthogonal à D et $\mathbb{R}^3$.

d) On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (7x+4y+4z, 4x-8y+z, -4x-y+8z).$$

Les sous-espaces vectoriels $D = \mathrm{Vect}\big((1,-4,0)\big)$ et $H = \mathrm{Vect}\big((0,0,1),(4,1,0)\big)$ sont stables par f. En effet, on a

$$f(D) = \mathrm{Vect}\big(f(1,-4,0)\big) = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(-9,36,0)}_{\in D}\big) \subset D,$$
$$f(H) = \mathrm{Vect}\big(f(0,0,1), f(4,1,0)\big) = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(4,1,8)}_{\in H}, \underbrace{(32,8,-17)}_{\in H}\big) \subset H.$$

Remarque 24 : Si F est un sous-espace stable par $f \in \mathscr{L}(E)$, alors la restriction de f au sous-espace vectoriel F, noté $f_{|F}$, est un endomorphisme de F. On appelle $f_{|F}$ l'endomorphisme induit par f sur F.

Proposition 13 : Soient $F_1, \ldots, F_m$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$. On considère une base adaptée $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$ à la décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$ et un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$. Les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_m$ sont stables par f si et seulement si la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} & A_m \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1,m]\!], \quad A_i \in \mathscr{M}_{\dim(F_i)}(\mathbb{K}).$$

Dans ce cas, on a $A_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_i}(f_{|F_i})$ pour tout $i \in [\![1,m]\!]$.

Exemple 27 : On reprend l'exemple précédent. On considère la base adaptée

$$\mathscr{B} = \big(\underbrace{(1,-4,0)}_{\text{Base de } D}, \underbrace{(0,0,1),(4,1,0)}_{\text{Base de H}}\big)$$

à la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^3 = D \oplus H$. La matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} -9 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 8 & -17 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Remarques 25 :

a) Pour tout projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ d'un espace vectoriel E de dimension finie, si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, alors on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad r = \dim(F) = \mathrm{rang}(p).$$

b) Pour toute symétrie $s \in \mathscr{L}(E)$ d'un espace vectoriel E de dimension finie, si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & -\mathrm{I}_\ell \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad k = \dim\big(\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)\big) \quad \text{et} \quad \ell = \dim\big(\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)\big).$$

III.D - Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

Définition (Trace d'une matrice carrée) : La trace d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notée $\mathrm{tr}(A)$, est la somme de ses coefficients diagonaux, i.e.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}.$$

Proposition 14 : La trace vérifie les propriétés suivantes.

(i) L'application $\mathrm{tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une application linéaire.

(ii) Pour tout $(A, B)^2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Rappelons que deux matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$.

Corollaire 3 : Si deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors elles ont la même trace.

Définition (Trace d'un endomorphisme) : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. La trace de f, notée $\mathrm{tr}(f)$, est la trace de la matrice représentant f dans une base $\mathscr{B}$ de E.

Remarque 26 : D'après le lemme précédent, le nombre $\mathrm{tr}(f)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ que l'on utilise pour faire le calcul. En effet, si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, on a avec la formule du changement de base

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times (P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}})^{-1},$$

donc les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ sont semblables, donc elles ont la même trace.

Exemples 28 :

a) On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = XP''(X) + P(X)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, la matrice de f est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par définition, on obtient que la trace de f est $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 1 + 1 + 1 = 3$.

b) D'après la remarque 25a, pour tout projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ d'un espace vectoriel E de dimension finie, on a la relation $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rang}(p)$.

Partie IV Hyperplans d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition (Hyperplan d'un espace vectoriel) : On appelle hyperplan d'un espace vectoriel E tout sous-espace vectoriel de E admettant une droite comme supplémentaire dans E.

Remarque 27 : Autrement dit, un sous-espace vectoriel F de E est un hyperplan de E si et seulement si il existe un vecteur $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $E = F \oplus \mathrm{Vect}(v)$.

Théorème de caractérisation des hyperplans : Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Le sous-espace vectoriel F est un hyperplan de E.

(ii) On a $\dim(F) = \dim(E) - 1$.

(iii) Il existe une application linéaire non nulle $\varphi : E \to \mathbb{K}$ telle que $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exemples 29 :

a) Si $\dim(E) = 2$, les hyperplans de E sont les droites vectorielles de E.

b) Si $\dim(E) = 3$, les hyperplans de E sont les plans vectoriels de E.

Remarque 28 : Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors on a pour $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ que

$$\varphi(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \cdots + x_n \varphi(e_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad a_i = \varphi(e_i).$$

On en déduit avec le théorème ci-dessus qu'un sous-espace vectoriel F de E est un hyperplan si et seulement si il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que F est caractérisé par

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in F \quad \Leftrightarrow \quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0. \qquad \text{(E)}$$

On dit que (E) est une équation de l'hyperplan F de E dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème (Équations d'un sous-espace vectoriel) : Soient E un espace vectoriel de dimension n et $p \in [\![0, n]\!]$.

(i) L'intersection de p hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension au moins $n - p$.

(ii) Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans de E.

Remarques 29 :

a) On déduit de (i) que l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à p équations et n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension au moins $n - p$.

b) On déduit de (ii) que si F est un sous-espace vectoriel de dimension $n-p$ d'un espace vectoriel E muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$, alors il existe des scalaires $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ pour $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$ tels que

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in F \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,n} x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{p,1} x_1 + \cdots + a_{p,n} x_n & = & 0. \end{array} \right. \qquad \text{(S)}$$

On dit que (S) est une équation du sous-espace vectoriel F de E dans la base $\mathscr{B}$.

c) L'équation d'un sous-espace vectoriel n'est pas unique : toute opération élémentaire sur le système donne un nouveau système décrivant le même sous-espace vectoriel.