

TD 11 Variables aléatoires discrètes

Partie I Révisions de première année

Exercice 1 : On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Calculer la loi de X .
2. Calculer l'espérance et la variance de X , puis l'espérance de $1/X$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une entreprise souhaite recruter un employé parmi n candidats. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle de manière indépendante un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0, 1[$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ si c'est le k -ième candidat qui est engagé et $X = n + 1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer l'espérance de X .

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note $M = \max(X, Y)$.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $P(X \leq k)$.
2. Calculer les probabilités $P(X = Y)$, $P(X \leq Y)$ et $P(X \neq Y)$.
3. Calculer $P(M \leq k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En déduire la loi de M .
4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire M .

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de U et la loi de V .
2. Calculer l'espérance de U , l'espérance de V et la covariance de U et V .

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = aij.$$

1. Déterminer la valeur de a , puis la loi de X et l'espérance de X .
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
3. Calculer $P(X = Y)$.
4. Déterminer la loi de $M = \max(X, Y)$.

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard de façon équiprobable une boîte, puis une boule dans cette boîte. On note X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Déterminer la loi de X et la loi de Y .
3. Calculer l'espérance de X et de Y .

Exercice 7 : Déterminer la loi de $S = X + Y$ où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire successivement et sans remise deux jetons. On note X le numéro du premier jeton tiré et Y celui du second.

1. Déterminer la loi du couple de (X, Y) , la loi de X et la loi de Y .
2. Calculer la covariance de X et Y .
3. Déterminer la loi de $Z = |X - Y|$.

Partie II Variables aléatoires discrètes

Exercice 9 : Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant « pile » avec la probabilité p . On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois « pile ». Soit X le nombre de faces obtenues au cours de cette expérience.

1. Déterminer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que X est presque sûrement fini.
3. Montrer que X est d'espérance finie et calculer celle-ci.

Exercice 10 : Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Calculer l'espérance de X^{-1} si X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.
2. Calculer l'espérance de $(X + 1)^{-1}$ si X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{2^{i+j}}.$$

1. Déterminer la valeur de a , puis la loi de X et l'espérance de X .
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 12 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètre $p \in]0, 1[$ et $q \in]0, 1[$. On note

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

Calculer la probabilité que la matrice A soit diagonalisable.

Exercice 13 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi de $D = X - Y$ et la loi de $M = \min(X, Y)$.
2. Étudier l'indépendance des variables aléatoires D et M .

Exercice 14 : On suppose qu'une colonie d'insectes produit N œufs où N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque $(N = n)$, le nombre X d'œufs qui éclosent suit une loi binomiale de paramètre n et $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi du couple (X, N) .
2. Déterminer la loi de X .

Exercice 15 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes de variance finie. On définit la matrice de covariance de $(X_1, \dots, X_n)$ par

$$M = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Exprimer la variance de $X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ en fonction de la matrice M .
2. En déduire que les valeurs propres de la matrice M sont toutes positives.

Exercice 16 : On définit $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} t^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant G .
2. Exprimer G avec les fonctions usuelles.
3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un nombre réel $\lambda > 0$ telle que la fonction génératrice de X vérifie $G_X = \lambda G$.
 - (a) Déterminer la valeur de λ et la loi de X .
 - (b) Montrer que X est de variance finie, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 17 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un réel $p \in]0, 1[$, un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = a \binom{n+k}{k} p^k.$$

1. Calculer la fonction génératrice de X et en déduire la valeur de a .
2. En déduire l'espérance et la variance de X .