TD 15 Topologie des espaces vectoriels normés

Dans toute la feuille, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Limites et continuité

Exercice 1 : Étudier la limite en $(0,0)$ des fonctions suivantes.

$$(i)\ \ f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|},\qquad (ii)\ \ f(x,y)=\frac{1-\cos(xy)}{xy^2},$$
$$(iii)\ \ f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^x,\qquad (iv)\ \ f(x,y)=|x|^y.$$

Exercice 2 : Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$. Étudier la continuité de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 3 : Étudier la limite en $(0,0,0)$ de la fonction

$$f:(x,y,z)\mapsto\frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}.$$

Exercice 4 : Étudier la limite en $(0,0,0)$ et en $(2,-2,0)$ de la fonction

$$f:(x,y,z)\mapsto\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}.$$

Exercice 5 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Étudier la continuité de l'application $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ f'(x) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 6 : Soit E un espace vectoriel normé. Déterminer toutes les applications $f:E\to E$ continues en 0 vérifiant $f(2x)=f(x)$ pour tout $x\in E$.

Exercice 7 : Soit E un espace vectoriel normé. On considère $f:E\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in E,\quad f(x)=\frac{x}{\max(1,\|x\|)}.$$

1. Montrer que f est 2-lipschitzienne.
2. Montrer que si la norme est issue d'un produit scalaire, alors f est 1-lipschitzienne.

Exercice 8 - Distance à une partie : Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$. Pour tout $x\in E$, on définit la distance de x à A par

$$d(x,A)=\inf_{a\in E} d(x,a).$$

1. On suppose que E est de dimension finie.
   (a) Montrer que si A est une partie fermée et bornée de l'espace vectoriel E, alors il existe $a\in A$ tel que $d(x,A)=d(x,a)$.
   (b) Montrer que si A est une partie fermée de l'espace vectoriel E, alors il existe $a\in A$ tel que $d(x,A)=d(x,a)$.
2. Montrer qu'un élément $x\in E$ est adhérent à A si et seulement si $d(x,A)=0$.
3. Montrer que l'application $x\mapsto d(x,A)$ est 1-Lipschitzienne sur E.

Partie II Topologie des espaces vectoriels normés

II.A - Ouverts et fermés d'un espace vectoriel normé

Exercice 9 : On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(M) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
5. Montrer que l'ensemble des matrices de symétrie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un fermé de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 10 : Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère

$$A = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\} \quad \text{et} \quad B = \{f \in E \mid f(1) > 0\}.$$

Montrer que A est une partie fermée de E et que B est une partie ouverte de E.

Exercice 11 : Soit $\mathscr{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles et bornées muni de la norme définie par $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

1. La partie des suites croissantes de $\mathscr{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ est-elle fermée ?
2. La partie des suites convergentes de $\mathscr{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ est-elle fermée ?
3. La partie des suites stationnaires en 0 de $\mathscr{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ est-elle fermée ?

Exercice 12 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On note E_n l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n scindés sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme unitaire de degré n. Montrer que $P \in E_n$ si et seulement si $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. En déduire que E_n est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 13 : Montrer que si F un sous-espace vectoriel ouvert d'un espace vectoriel normé E, alors $F = E$.

Exercice 14 : Soient E un espace préhilbertien et X une partie de E. Montrer que $X^\perp$ est une partie fermée de E.

II.B - Parties denses d'un espace vectoriel normé

Exercice 15 : On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour tout $(A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une partie dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Montrer que l'application $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}_n[X]$ définie par $\varphi : M \mapsto \chi_M$ est continue.
4. En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$.

Exercice 16 : On note $E = \mathscr{C}^0([0,1),\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F n'est pas dense dans E muni de $\|\cdot\|_\infty$.
2. Montrer que F est dense dans E muni de $\|\cdot\|_1$.

Exercice 17 : On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables $D_n(\mathbb{C})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 18 : Soient U et V deux parties denses d'un espace vectoriel normé E. Montrer que si U est ouvert, alors $U \cap V$ est dense dans E.

Exercice 19 : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (a,b) \in A^2, \quad \frac{a+b}{2} \in A.$$

Montrer que A est dense dans $]\inf(A), \sup(A)[$.