



CHAPITRE 15

Topologie des espaces vectoriels normés

Plan du chapitre

I	Topologie d'un espace vectoriel normé	2
A -	Ouverts d'un espace vectoriel normé	2
B -	Fermés d'un espace vectoriel normé	3
C -	Parties denses d'un espace vectoriel normé	5
II	Continuité des applications entre deux espaces vectoriels normés	6
A -	Limite et continuité en un point	6
B -	Continuité sur une partie	8
III	Équivalence des normes	10
A -	Généralités	10
B -	Espaces vectoriels normés de dimension finie	11

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étendre différentes notions d'analyse vues en première année au cadre plus général des espaces vectoriels.

Dans une première partie, nous étudierons les bases de la topologie afin de généraliser notamment les notions d'intervalle ouvert et de segment. Dans un second temps, nous étendrons la notion de continuité aux applications entre deux espaces vectoriels normés.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

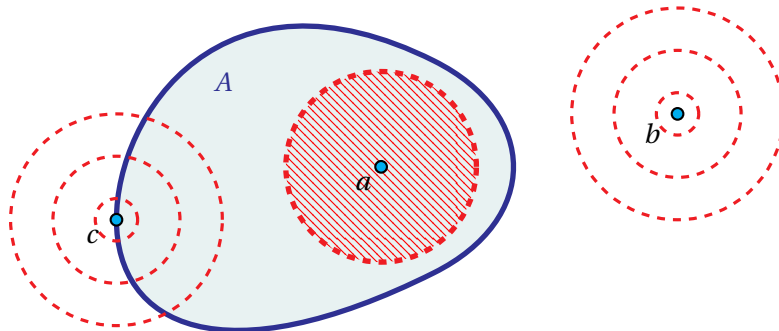
Partie I Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ sur $\mathbb{K}$.

I.A - Ouverts d'un espace vectoriel normé

Définition (Point intérieur à une partie) : Soient A une partie de E et $a \in E$. On dit que a est intérieur à A s'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.

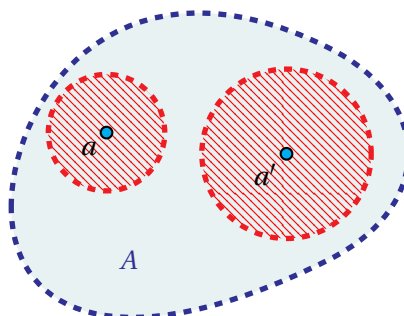
Illustration : Ci-dessous, le point a est intérieur à A tandis que les points b et c ne sont pas intérieurs à A .



Définition (Ouvert) : On dit qu'une partie A de E est ouverte (ou que A est un ouvert de E) si tout point de A est intérieur à A , i.e.

$$\forall a \in A, \quad \exists r > 0, \quad B(a, r) \subset A.$$

Illustration : La partie A sur le schéma ci-dessous est ouverte.



Remarque 1 : Intuitivement, une partie de E est ouverte si elle ne contient aucune partie de son « bord ».

Exemple 1 : Les intervalles de la forme $]a, b[$ avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ sont des ouverts de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Proposition 1 : Pour tout $a \in E$ et tout réel $r > 0$, la boule ouverte $B(a, r)$ est un ouvert de E .

Proposition 2 : On a les propriétés suivantes.

- (i) Une réunion d'ouverts de E est un ouvert de E .
- (ii) Une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E .

Exemple 2 : La partie $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$ est un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Exercice 1 : On considère deux parties non vides A et B de E . On définit la partie

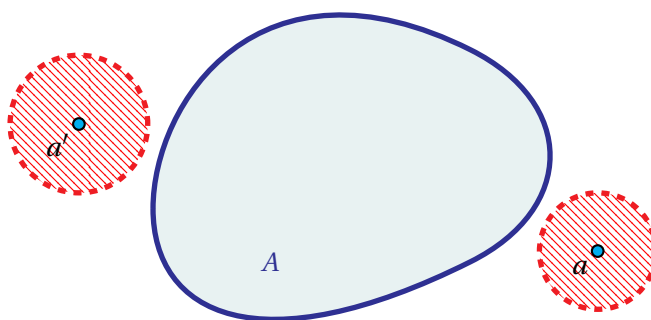
$$A + B = \{x \in E \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a + b\}.$$

Montrer que si A est un ouvert de E , alors $A + B$ est un ouvert de E .

I.B - Fermés d'un espace vectoriel normé

Définition (Fermé) : On dit qu'une partie A de E est fermée (ou que A est un fermé de E) si $E \setminus A$ est une partie ouverte de E .

Illustration : La partie A sur le schéma ci-dessous est fermée.



Remarque 2 : Intuitivement, une partie de E est fermée si elle contient tout son « bord ».

Exemples 3 :

- a) Les intervalles de la forme $[a, b]$ avec $a \leq b$ sont des fermés de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
- b) Les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ et $] -\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont des fermés de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
- c) Tout ensemble de la forme $A = \{a\}$ avec $a \in E$ est une partie fermée de E .

Proposition 3 : Pour tout élément $a \in E$ et tout réel $r \geq 0$, la boule fermée $B_f(a, r)$ et la sphère $S(a, r)$ sont des fermés de E .

Proposition 4 : On a les propriétés suivantes.

- (i) Une réunion finie de fermés de E est un fermé de E .
- (ii) Une intersection de fermés de E est un fermé de E .

Exemples 4 :

- a) La partie $\mathbb{Z}$ est un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
- b) Les ensembles finis de E sont des fermés de $(E, \|\cdot\|)$.

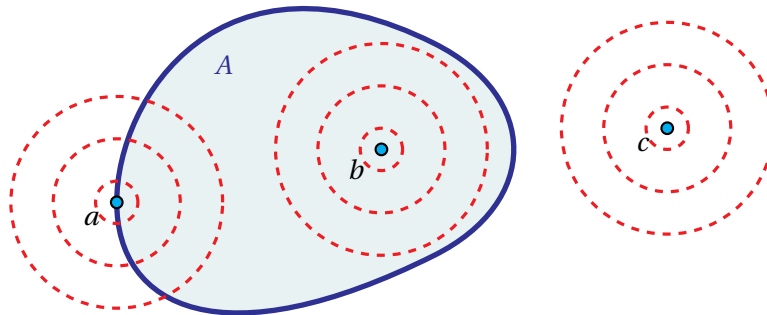
Théorème (Caractérisation séquentielle des fermés) : Soit A une partie de E . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) La partie A est un fermé de E .
- (ii) Pour toute suite (a_n) d'éléments de A convergeant vers un élément $\ell \in E$, on a $\ell \in A$.

Exemple 5 : La partie $A = \{e^{-n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, car $(e^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers l'élément $\ell = 0 \notin A$.

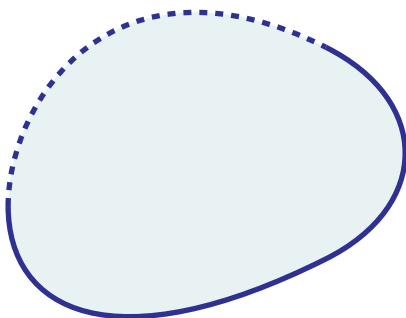
Définition (Point adhérent à une partie) : Soient A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est adhérent à A si pour tout réel $r > 0$, on a $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Illustration : Ci-dessous, les points a et b sont adhérents à A , tandis que le point c n'est pas adhérent à A .

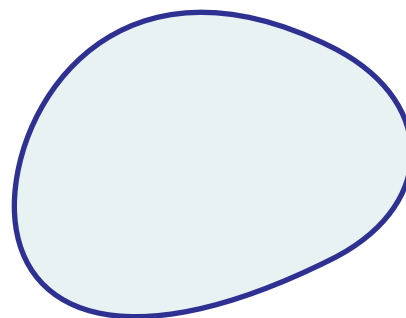


Définition (Adhérence d'une partie) : L'adhérence d'une partie A de E est l'ensemble des points de E adhérents à A .

Illustration : Les deux figures ci-dessous représentent une partie A de E et son adhérence dans E .



Une partie A de E



L'adhérence de A dans E

Exemples 6 :

- a) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, l'adhérence de $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est $[a, b]$.
- b) Pour tout $a \in E$ et tout réel $r > 0$, l'adhérence de $B(a, r)$ ou de $B_f(a, r)$ est $B_f(a, r)$.

Théorème (Caractérisation séquentielle de l'adhérence d'une partie) : Soit A une partie de E . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Un point $a \in E$ est adhérent à A .
- (ii) Il existe une suite (a_n) d'éléments de A convergeant vers a .

Remarque 3 : L'adhérence d'une partie A est un fermé de E .

I.C - Parties denses d'un espace vectoriel normé

Définition (Partie dense) : Une partie A de E est dite dense dans E si tout point de E est adhérent à A .

Remarque 4 : Par la caractérisation séquentielle de l'adhérence, une partie A de E est dense dans E si et seulement si tout élément $x \in E$ est la limite d'une suite (a_n) d'éléments de A .

Exemples 7 :

- a) Par un résultat du cours de première année, la partie $\mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
- b) Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, la partie $\mathbb{Q}^d$ est dense dans $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$. En effet, si $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, il existe d'après la remarque précédente pour chaque indice $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$, une suite $(x_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ convergeant vers l'élément x_k . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(d)})$, on obtient que

$$\|x - x_n\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_k - x_n^{(k)})^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{Q}^d$ convergeant vers x .

- c) Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé non nul, alors pour tout $a \in E$, la partie $E \setminus \{a\}$ est dense dans E . D'une part, tout élément de $E \setminus \{a\}$ est adhérent à $E \setminus \{a\}$. D'autre part, l'élément a est adhérent à $E \setminus \{a\}$, car si $v \in E \setminus \{0_E\}$, alors la suite $(a + e^{-n}v)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $E \setminus \{a\}$ convergeant vers a .

Exercice 2 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel strict de E , la partie $E \setminus F$ est dense dans E .

Exercice 3 : On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in \llbracket K, +\infty \rrbracket$, on a $A - \frac{1}{k}I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.
- En déduire que $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie II Continuité des applications entre deux espaces vectoriels normés

Dans cette partie, on considère trois espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ sur $\mathbb{K}$. Pour tout élément $a \in E$ et réel $r > 0$, on note $B_E(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r dans E .

II.A - Limite et continuité en un point

Définition (Limite d'une fonction en un point adhérent) : Soit $a \in A$ un point adhérent à une partie non vide A de E . On dit qu'une fonction $f : A \rightarrow F$ a pour limite $\ell \in F$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in A \cap B_E(a, \eta), \quad \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Remarques 5 :

- a) On a que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - \ell\|_F = 0$.
- b) La notion de limite dépend du choix de la norme sur l'espace vectoriel E et du choix de la norme sur l'espace vectoriel F .

Proposition (Unicité de la limite d'une fonction) : Soit $a \in A$ un point adhérent à une partie non vide A de E . Si une fonction $f : A \rightarrow F$ a pour limite ℓ_1 en a et pour limite ℓ_2 en a , alors $\ell_1 = \ell_2$.

Remarque 6 : Lorsque $f : A \rightarrow F$ a pour limite ℓ en un point adhérent $a \in E$ adhérent à A , on dit que la limite de f en a est ℓ .

Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite) : Soient $f : A \rightarrow F$ une fonction définie sur une partie non vide A de E et $a \in E$ un point adhérent à A . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) La fonction f a pour limite $\ell \in F$ au point a .
- (ii) Pour toute suite (a_n) d'éléments de A convergeant vers a , la suite $(f(a_n))$ converge vers ℓ .

Proposition (Opérations algébriques sur les limites de fonctions) : Soit $a \in A$ un point adhérent à une partie non vide A de E .

- (i) Si une fonction $f : A \rightarrow F$ a pour limite $\ell \in F$ en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\|_F = \|\ell\|_F$.
- (ii) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, si une fonction $f : A \rightarrow F$ a pour limite $\ell \in F$ en a et une fonction $g : A \rightarrow F$ a pour limite $\ell' \in F$ en a , alors la fonction $\lambda f + \mu g$ a pour limite $\lambda \ell + \mu \ell'$ en a .
- (iii) Si une fonction $\varphi : A \rightarrow \mathbb{K}$ a pour limite $\lambda \in \mathbb{K}$ en a et une fonction $f : A \rightarrow F$ a pour limite $\ell \in F$ en a , alors la fonction $\varphi \times f$ a pour limite $\lambda \ell$ en a .
- (iv) Si une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ a pour limite $\ell \in \mathbb{K}$ en a et une fonction $g : A \rightarrow \mathbb{K}$ a pour limite $\ell' \in \mathbb{K}^*$ en a , alors la fonction $\frac{f}{g}$ est définie sur un voisinage de a et elle a pour limite $\frac{\ell}{\ell'}$ en a .

Remarque 7 : La point (iii) implique en particulier que si une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ a pour limite $\ell \in \mathbb{K}$ en a et une fonction $g : A \rightarrow \mathbb{K}$ a pour limite $\ell' \in \mathbb{K}$ en a , alors la fonction $f \times g$ a pour limite $\ell \ell'$ en a .

Proposition (Composition de limites) : Soient $f : A \rightarrow F$ une fonction définie sur une partie non vide A de E et $g : B \rightarrow G$ une fonction définie sur une partie non vide B de F telle que $f(A) \subset B$. Si f a pour limite $b \in F$ en un point adhérent $a \in E$ à A et si g a pour limite $\ell \in G$ en b , alors $g \circ f$ a pour limite ℓ en a .

Remarque 8 : La condition $f(A) \subset B$ assure que la fonction $g \circ f$ est définie sur A .

Proposition 5 : Soient $a \in A$ un point adhérent à une partie non vide A de E et $\ell \in F$. Si $f : A \rightarrow F$ et $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $\|f(x) - \ell\|_F \leq \varphi(x)$ pour tout $x \in A$ et si $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Remarque 9 : Ce résultat est une généralisation du théorème d'encadrement.

Exercice 4 : On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Étudier la limite en $(0,0)$ des fonctions suivantes.

$$(i) f : (x, y) \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), \quad (ii) f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^4 + y^4}, \quad (iii) f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Définition (Continuité en un point) : Soit $f : A \rightarrow F$ une fonction définie sur une partie non vide A de E . On dit que f est continue en un point $a \in A$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la continuité) : Soient $f : A \rightarrow F$ une fonction définie sur une partie non vide A de E et $a \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) La fonction f est continue en a .
- (ii) Pour toute suite (a_n) d'éléments de A convergeant vers a , la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(a)$.

Exercice 5 : On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi : f \mapsto f(1)$.

1. Si E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, montrer que φ est continue en 0_E .
2. Si E est muni de la norme $\|\cdot\|_1$, montrer que φ n'est pas continue en 0_E .

II.B - Continuité sur une partie

Définition (Continuité sur une partie) : Une fonction $f : A \rightarrow F$ définie sur une partie non vide A de E est dite continue sur A si f est continue en tout point de A .

Proposition (Opérations algébriques de fonctions continues) : Soit A une partie non vide de E .

- (i) Si une fonction $f : A \rightarrow F$ est continue sur A , alors l'application $x \mapsto \|f(x)\|_F$ est continue sur A .
- (ii) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, si une fonction $f : A \rightarrow F$ est continue sur A et une fonction $g : A \rightarrow F$ est continue sur A , alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur A .
- (iii) Si une fonction $\varphi : A \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur A et une fonction $f : A \rightarrow F$ est continue sur A , alors $\varphi \times f$ est continue sur A .
- (iv) Si une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur A et une fonction $g : A \rightarrow \mathbb{K}$ est continue et ne s'annule pas sur A , alors la fonction $\frac{f}{g}$ est définie et continue sur A .

Remarque 10 : La point (iii) implique en particulier que si une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur A et une fonction $g : A \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur A , alors la fonction $f \times g$ est continue sur A .

Proposition (Composition de fonctions continues) : Si $f : A \rightarrow F$ est une fonction continue sur une partie non vide A de E et si $g : B \rightarrow G$ une fonction continue sur une partie non vide B de F telle que $f(A) \subset B$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur A .

Remarque 11 : La condition $f(A) \subset B$ assure que la fonction $g \circ f$ est définie sur A .

Définition (Fonction lipschitzienne) : Soient $f : A \rightarrow F$ une fonction définie sur une partie non vide A de E . On dit que f est lipschitzienne s'il existe un réel $K \geq 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x - y\|_E.$$

Exemples 8 :

- a) La fonction $\|\cdot\|_E$ est lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, car on a l'inégalité

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \left| \|x\|_E - \|y\|_E \right| \leq \|x - y\|_E.$$

- b) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, la fonction $\varphi_i : (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_i$ est lipschitzienne de $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_2)$ dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, car on l'inégalité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^d \times \mathbb{K}^d, \quad |\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| = \sqrt{(x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2} = \|x - y\|_2.$$

- c) On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. L'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi : f \mapsto f(0) + f(1)$ est lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, car on a l'inégalité

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad |\varphi(f) - \varphi(g)| = |f(0) - g(0) + f(1) - g(1)| \leq |f(0) - g(0)| + |f(1) - g(1)| \leq 2\|f - g\|_\infty.$$

Proposition 6 : Si $f : A \rightarrow F$ est une fonction lipschitzienne définie sur une partie non vide A de E , alors f est continue sur A .

Exemples 9 :

- a) La fonction $\|\cdot\|_E$ est continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.
- b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction $\varphi_i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ est continue de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.
- c) On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. L'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi : f \mapsto f(0) + f(1)$ est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Exercice 6 : On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 : On considère l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$ avec $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi : f \mapsto f(1)$ est continue sur E .

Exercice 8 : Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) L'application φ est continue sur E .
- (ii) L'application φ est lipschitzienne.
- (iii) Il existe un réel $K \geq 0$ tel que $\|\varphi(x)\|_F \leq K\|x\|_E$.

Proposition 7 : Soit $f : E \rightarrow F$ une application continue sur l'espace vectoriel normé E .

- (i) Pour tout ouvert B de F , l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ est un ouvert de E .
- (ii) Pour tout fermé B de F , l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ est un fermé de E .

Exemple 10 : Comme l'application $N = \|\cdot\|_E$ est continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, on retrouve pour tout réel $r > 0$ que $B(0_E, r) = N^{-1}(]-\infty, r[)$ est un ouvert de E et que $B_f(0_E, r) = N^{-1}(]-\infty, r])$ est un fermé de E .

Corollaire 1 : Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur un espace vectoriel normé E sur $\mathbb{R}$.

- (i) L'ensemble $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est un ouvert de E .
- (ii) L'ensemble $\{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ est un fermé de E .
- (iii) L'ensemble $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ est un fermé de E .

Exemples 11 :

- a) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^2\}$ est un ouvert de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.
- b) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(y) \leq \cos(x)\}$ est un fermé de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.
- c) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 x^3 = \exp(x)\}$ est un fermé de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

Exercice 9 : Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble $\{f \in E \mid f(1) \neq 0\}$ est un ouvert de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Partie III Équivalence des normes

III.A - Généralités

Dans cette partie, on considère deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$.

On rappelle que deux normes $N_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ sur E sont dites équivalentes s'il existe des réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Nous avons vu dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés que les notions de partie bornée, de suite bornée, de suite convergente sont invariantes par passage à une norme équivalente.

Nous avons des résultats analogues pour les notions topologiques et la continuité.

Proposition 8 : Toutes les notions topologiques sont invariantes par passage à une norme équivalente.

Remarque 12 : Plus formellement, si $N_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux normes équivalentes sur E , alors on a les propriétés suivantes.

- (i) Une partie A de E est ouverte dans (E, N_1) si et seulement si elle est ouverte dans (E, N_2) .
- (ii) Une partie A de E est fermée dans (E, N_1) si et seulement si elle est fermée dans (E, N_2) .
- (iii) Pour toute partie A de E , l'adhérence de A dans (E, N_1) est égale à l'adhérence de A dans (E, N_2) .
- (iv) Une partie A de E est dense dans (E, N_1) si et seulement si elle est dense dans (E, N_2) .

Proposition 9 : Les notions de fonction bornée, de limite d'une fonction, de continuité d'une fonction et de fonctions lipschitzienne sont invariantes par passage à des normes équivalentes.

Remarque 13 : Plus formellement, si $N_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux normes équivalentes sur E et si $\tilde{N}_1 : F \rightarrow \mathbb{R}$ et $\tilde{N}_2 : F \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux normes équivalentes sur F , alors on a les propriétés suivantes.

- (i) Une fonction $f : A \rightarrow F$ est bornée sur A pour l'espace vectoriel normé $(F, \tilde{N}_1)$ si et seulement si elle est bornée sur A pour l'espace vectoriel normé $(F, \tilde{N}_2)$.
- (ii) Soient $a \in A$ un point adhérent à une partie non vide A de E . Une fonction $f : A \rightarrow F$ vérifie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in F$ pour les espaces vectoriels normés (E, N_1) et $(F, \tilde{N}_1)$ si et seulement si elle vérifie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ pour les espaces vectoriels normés (E, N_2) et $(F, \tilde{N}_2)$.
- (iii) Une fonction $f : A \rightarrow F$ est continue en un point $a \in A$ pour les espaces vectoriels normés (E, N_1) et $(F, \tilde{N}_1)$ si et seulement si elle est continue en a pour les espaces vectoriels normés (E, N_2) et $(F, \tilde{N}_2)$.
- (iv) Une fonction $f : A \rightarrow F$ est continue sur A pour les espaces vectoriels normés (E, N_1) et $(F, \tilde{N}_1)$ si et seulement si elle est continue sur A pour les espaces vectoriels normés (E, N_2) et $(F, \tilde{N}_2)$.
- (v) Une fonction $f : A \rightarrow F$ est lipschitzienne pour les espaces vectoriels normés (E, N_1) et $(F, \tilde{N}_1)$ si et seulement si elle est lipschitzienne pour les espaces vectoriels normés (E, N_2) et $(F, \tilde{N}_2)$.

III.B - Espaces vectoriels normés de dimension finie

On rappelle que si E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, alors toutes les normes sur E sont équivalentes. Par conséquent, il n'est pas utile de préciser la norme pour travailler sur un espace vectoriel normé de dimension finie : les résultats seront les mêmes quelle que soit la norme utilisée.

Définition (Fonctions coordonnées dans une base) : Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ une base d'un espace vectoriel F de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et X un ensemble. Les fonctions coordonnées d'une fonction $f : X \rightarrow F$ dans la base $\mathcal{B}$ sont les fonctions $f_k : X \rightarrow \mathbb{K}$ pour $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ telles que $(f_1(x), \dots, f_d(x))$ sont les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ pour tout $x \in X$.

Exemple 12 : Les fonctions coordonnées associées à la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $f_1 : t \mapsto \cos(t)$ et $f_2 : t \mapsto \sin(t)$.

Proposition (Caractérisations par les fonctions coordonnées) : Soient A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et $\mathcal{B}$ une base d'un espace vectoriel normé F de dimension finie.

- (i) Soient $a \in E$ un point adhérent à A et $\ell \in F$ dont on note $(\ell_1, \dots, \ell_d)$ les coordonnées dans $\mathcal{B}$. Si $f_1, \dots, f_d$ sont les fonctions coordonnées d'une fonction $f : A \rightarrow F$, alors on a l'équivalence

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = \ell_k.$$

- (ii) Une fonction $f : A \rightarrow F$ est continue en un point $a \in A$ si et seulement si ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_d$ sont continues au point a .
- (iii) Une fonction $f : A \rightarrow F$ est continue sur A si et seulement si ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_d$ sont continues sur A .

Remarques 14 :

- a) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que si $f : A \rightarrow \mathbb{K}^d$ est définie par $f : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_d(x))$, alors f est continue sur A si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_d$ sont continues sur A .
- b) Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On en déduit que si $f : A \rightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est définie par $f : x \mapsto (f_{i,j}(x))_{i,j}$, alors f est continue sur A si et seulement si la fonction $f_{i,j}$ est continue sur A pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$.
- c) Soit $d \in \mathbb{N}$. On en déduit que si $f : A \rightarrow \mathbb{K}_d[X]$ est définie par $f : x \mapsto \sum_{k=0}^d f_k(x) X^k$, alors f est continue sur A si et seulement si la fonction f_k est continue sur A pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$.

Exemples 13 :

- a) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$ car les deux fonctions $f_1 : t \mapsto \cos(t)$ et $f_2 : t \mapsto \sin(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- b) La fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} \exp(t) & \sqrt{t} \\ \cos(t) & \ln(t) \end{pmatrix}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ car les quatre fonctions

$$f_{1,1} : t \mapsto \exp(t), \quad f_{1,2} : t \mapsto \sqrt{t}, \quad f_{2,1} : t \mapsto \cos(t), \quad f_{2,2} : t \mapsto \ln(t)$$

sont continues sur $]0, +\infty[$.

- c) Soit $d \in \mathbb{N}$. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_d[X]$ définie par $f : t \mapsto \sum_{k=0}^d \sin(kt) X^k$ est continue sur $\mathbb{R}$ car chaque fonction $f_k : t \mapsto \sin(kt)$ pour $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème des bornes atteintes : Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur une partie non vide, fermée et bornée A d'un espace vectoriel normé E de dimension finie, alors la fonction f est bornée et elle atteint ses bornes.

DÉMONSTRATION HORS PROGRAMME

Remarque 15 : On peut reformuler la conclusion du théorème de différentes manières.

- Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe $(a, b) \in A^2$ tel que

$$f(a) = \inf_{x \in A} (f(x)) \quad \text{et} \quad f(b) = \sup_{x \in A} (f(x)).$$

- Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe $(a, b) \in A^2$ tel que

$$\forall x \in A, \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Exemple 14 : La fonction $f : [0, \pi]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y) \sin(x + y)$ est continue sur la partie non vide, fermée et bornée $[0, \pi]^2$ de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^2$, donc f est bornée sur $[0, \pi]^2$ et elle atteint ses bornes.

Dans un chapitre ultérieur, nous développerons de nouvelles notions qui nous permettront d'établir pour cette fonction que

$$\max_{[0, \pi]^2} (f) = f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \text{et} \quad \min_{[0, \pi]^2} (f) = f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Définition (Application polynomiale sur un espace vectoriel) : Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Une application $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ est dite polynomiale s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ de E , une partie finie I de $\mathbb{N}^d$ et une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f(x_1 e_1 + \dots + x_d e_d) = \sum_{i \in I} a_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_d}.$$

Remarques 16 :

- Autrement dit, une fonction est polynomiale si f s'obtient en effectuant des combinaisons linéaires et des produits des fonctions coordonnées $f_k : x \mapsto x_k$ pour $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ de E .
- On peut démontrer que la réalisation de la condition dans la définition pour être polynomiale ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E .

Exemples 15 :

- L'application $\varphi : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $\varphi : (x, y) \mapsto x^2 - xy^3 + 2y^4$ est polynomiale.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le déterminant $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une application polynomiale.

Définition (Application multilinéaire) : Soient $E_1, \dots, E_m, F$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Une application $\varphi : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ est dite multilinéaire (ou m -linéaire) si

$$\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \forall (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m) \in \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m E_i, \quad \varphi_k : x_k \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_m)$$

est une application linéaire de E_k dans F .

Remarques 17 :

- a) Autrement dit, une application $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_m \rightarrow F$ est multilinéaire si et seulement si elle est linéaire par rapport à chacune de ses m variables.
- b) Si $m = 1$, on retrouve la définition d'une application linéaire.
- c) Si $m = 2$, on retrouve la définition d'une application bilinéaire.

Exemple 16 : Soit $(p, q, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$. L'application du produit matriciel $\varphi : \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ définie par $\varphi : (M, N) \mapsto MN$ est bilinéaire.

Théorème 1 : Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

- (i) Si E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$, alors toute application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ est continue sur E .
- (ii) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Si $E_1, \dots, E_m$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, alors toute application multilinéaire $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_m \rightarrow F$ est continue sur $E_1 \times \cdots \times E_m$.
- (iii) Si E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$, alors toute application polynomiale $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur E .

Exemples 17 :

- a) L'application $\varphi : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $\varphi : (x, y) \mapsto x^2 - xy^3 + 2y^4$ est continue sur $\mathbb{K}^2$.
- b) Tout produit scalaire $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ sur un espace vectoriel réel E de dimension finie est continue sur E^2 .
- c) Le produit vectoriel $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi : (u, v) \mapsto u \wedge v$ est continue sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.
- d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La trace $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- e) Soit $(p, q, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Le produit matriciel $\varphi : \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ définie par $\varphi : (M, N) \mapsto MN$ est continue sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
- f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le déterminant $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 10 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que L est la matrice d'un projecteur.

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.