CHAPITRE 7

Suites et séries de fonctions

Jérôme VON BUHREN
http://vonbuhren.free.fr

Lycée Couffignal - PSI*

Dans ce chapitre, nous commencerons par introduire les suites de fonctions et les séries de fonctions, i.e. les suites et les séries dont les termes sont des fonctions définies sur un même intervalle. Après avoir défini différents modes de convergence pour ces nouveaux objets, nous étudierons les conditions à vérifier pour que certaines propriétés classiques (continuité, dérivabilité, etc.) se transfèrent de la suite à sa limite ou de la série à sa somme.

Dans tout le chapitre, on considère un intervalle I contenant au moins deux points et on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Dans cette sous-partie, nous allons définir deux notions de convergence pour les suites fonctions.

Définition (Convergence simple d'une suite de fonctions)

On dit qu'une suite $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge simplement sur I s'il existe une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Dans ce cas, on dit que la suite $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ converge simplement vers f sur I.

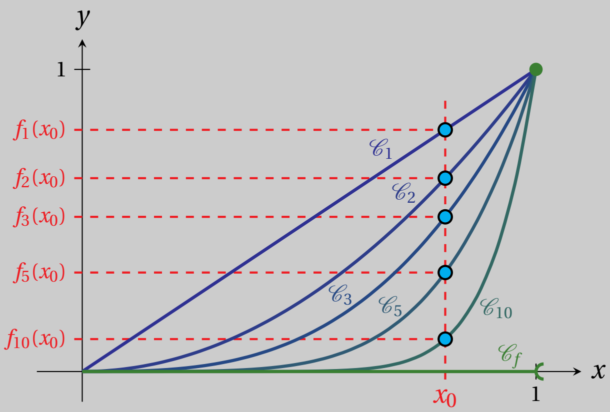
Remarques 1

a) La limite d'une suite de fonctions pour la convergence simple est unique : si $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ converge simplement vers $f : I \to \mathbb{K}$ sur I et vers $g : I \to \mathbb{K}$ sur I, alors on a $f = g$.

b) Étudier la convergence simple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ revient par définition à étudier pour chaque élément $x \in I$ la convergence de la suite numérique $(f_n(x))_{n \geqslant n_0}$.

Illustration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$.



La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$ vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

Exemple 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto x\mathrm{e}^{-nx}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.

Définition (Convergence uniforme d'une suite de fonctions)

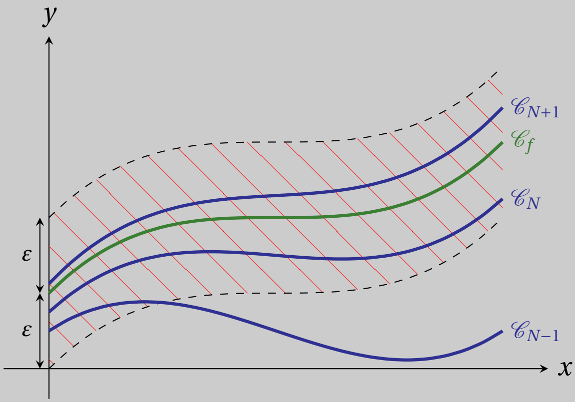
On dit qu'une suite $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge uniformément sur I s'il existe une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in [\![n_0, +\infty [\![, \quad \forall n \in [\![N, +\infty [\![, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que la suite $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ converge uniformément vers f sur I.

Illustration

D'un point de vue géométrique, la définition revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, l'écart entre la courbe représentative $\mathscr{C}_n$ de f_n et la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f est strictement inférieur à ε pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.



Remarque 2

En revenant à la définition de la convergence d'une suite numérique, la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ vers f s'écrit

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in [\![n_0, +\infty [\![, \quad \forall n \in [\![N, +\infty [\![, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

La seule différence entre les définitions de la convergence simple et de la convergence uniforme est l'emplacement de « $\forall x \in I$ ». Pour la convergence simple, l'entier N est susceptible de dépendre de l'élément $x \in I$, alors que pour la convergence uniforme, l'entier N doit convenir pour tous les éléments $x \in I$ et donc être indépendant de $x \in I$.

Proposition 1

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors (f_n) converge simplement vers f sur I.

Remarques 3

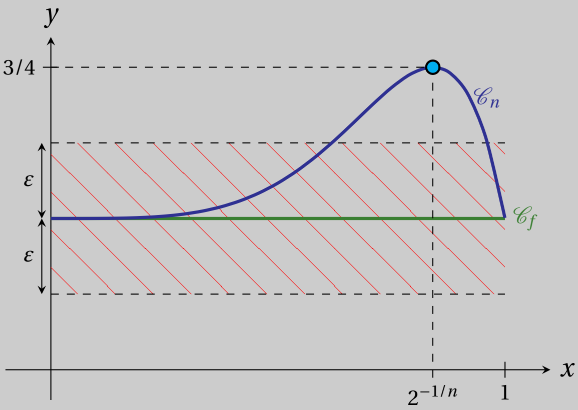
a) On déduit de la proposition ci-dessus que la limite d'une suite de fonctions pour la convergence uniforme est unique. En effet, si (f_n) converge uniformément vers $f : I \to \mathbb{K}$ sur I et vers $g : I \to \mathbb{K}$ sur I, alors (f_n) converge simplement vers f sur I et vers g sur I, donc $f = g$.

b) En pratique, lorsqu'on souhaite étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n), on commence par étudier sa convergence simple afin de déterminer la fonction « candidate » pour être la limite uniforme de la suite (f_n).

Illustration

On n'a pas toujours convergence uniforme en en cas de convergence simple. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on note Γ_n la courbe représentative de la fonction $g_n : x \mapsto x^n(1-x^n)+2^{-1}$ sur $[0,1]$, alors la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $g : x \mapsto 2^{-1}$ sur $[0,1]$, mais elle ne converge pas uniformément vers la fonction g sur $[0,1]$ comme on peut l'observer sur le graphique ci-dessous.

Illustration



Rappelons que si on note $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors l'application $\|\cdot\|_{\infty,I}$ définie par

$$\forall f \in \mathscr{B}(I,\mathbb{K}), \quad \|f\|_{\infty,I} = \sup_{t\in I} |f(t)|$$

est une norme sur $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$.

Définition (Norme de la convergence uniforme)

L'application $\|\cdot\|_{\infty,I} : f \mapsto \sup_{t\in I} |f(t)|$ est appelée la norme de la convergence uniforme sur l'intervalle I.

Théorème (Caractérisation de la convergence uniforme d'une suite de...)

Soit $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La suite $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ converge uniformément vers $f : I \to \mathbb{K}$ sur I.

(ii) Il existe un entier $N \in [\![n_0, +\infty [\![$ tel que $f_n - f$ est bornée pour tout $n \in [\![N, +\infty [\![$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,I} = 0$.

(iii) Il existe un entier $N \in [\![n_0, +\infty [\![$ et une suite de nombres réels $(\alpha_n)_{n\geqslant N}$ convergeant vers 0 tels que

$$\forall n \in [\![N, +\infty [\![, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n.$$

(iv) Pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant n_0}$ d'éléments de I, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) - f(x_n) = 0$.

Remarques 4

a) On déduit du point (ii) que si (f_n) est une suite d'éléments de $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ et si $f \in \mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ est une fonction, alors la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I si et seulement si la suite (f_n) converge vers f dans l'espace vectoriel normé $\left(\mathscr{B}(I,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty\right)$.

b) En pratique, le point (iii) est utilisé pour montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ converge uniformément vers f sur I.

c) En pratique, le point (iv) est utilisé pour montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ ne converge pas uniformément vers f sur I.

Exemples 2

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto x\mathrm{e}^{-nx}$.

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle f sur $[0, +\infty[$.
- Pour étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on effectue une étude de la fonction $f_n - f$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n - f$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad (f_n - f)'(x) = (1 - nx)\mathrm{e}^{-nx}.$$

Exemples 2

a) • On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$(f_n - f)'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n - f$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}n}$	$\searrow$	0

En notant $I = [0, +\infty[$, on en déduit que $\|f_n - f\|_{\infty,I} = \dfrac{1}{\mathrm{e}n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$ par le point (ii) du théorème précédent.

Exemples 2

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{x^2+n^2}$.

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle f sur $\mathbb{R}$.
- De plus, on a l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ par le point (iii) du théorème précédent.

Exemples 2

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto nx\mathrm{e}^{-nx}$.

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle f sur $[0, +\infty[$.
- Si on note $x_n = n^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a $(f_n - f)(x_n) = \mathrm{e}^{-1}$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$ par le point (iv) du théorème précédent.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Théorème de continuité pour une suite de fonctions

Si $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est continue sur I ;

(ii) la suite $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ converge uniformément sur I vers une fonction f ;

alors la fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est continue sur I.

Exemple 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x^n}$. La suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1/2 & \text{si} \quad x = 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Comme la fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que f n'est pas continue en 1, on en déduit par le théorème ci-dessus que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur $[0,+\infty[$.

Remarque 5

Si on n'a pas la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ sur I, on peut parfois s'en sortir en appliquant le théorème sur un segment quelconque $[a,b]$ de I. Si l'hypothèse (ii) est vérifiée sur le segment $[a,b]$, alors on en déduit par le théorème que f est continue sur $[a,b]$.
Comme $[a,b]$ est un segment quelconque de I et que la continuité est une propriété locale, on conclut que f est continue sur I.

ATTENTION

Même si la suite $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ converge uniformément vers une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ sur tout segment de I, on ne peut pas en déduire que $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ converge uniformément vers f sur l'intervalle I.
Par exemple, si on considère la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ de l'intervalle $I = [0, 1[$ vers la fonction nulle, car on a

$$\forall x \in [a, b], \quad |f_n(x)| \leqslant b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

mais la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $I = [0, 1[$, car on a $\|f_n\|_{\infty,I} = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)| = 1$.

Si on considère la fonction $f_n : x \mapsto n^2 x^n (1-x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle f sur le segment $[0,1]$, mais on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0 = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ vers f sur un segment $[a,b]$ n'est pas suffisante pour avoir

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nous avons besoins d'hypothèses supplémentaires.

Théorème d'intégration pour une suite de fonctions...

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Si $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$;

(ii) la suite $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f ;

alors on a la relation

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques 6

a) Par le théorème de continuité pour une suite de fonctions, on sait que la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, donc on peut bien l'intégrer sur $[a, b]$.

b) Dans le théorème, on ne peut pas remplacer $[a, b]$ par un intervalle qui n'est pas un segment.

Exemples 4

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto xe^{-nx}$. On a démontré dans l'exemple 2.a que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Par le théorème ci-dessus, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 xe^{-nx}\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

b) Si on considère la fonction $f_n : x \mapsto n^2x^n(1-x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit du calcul effectué dans l'introduction de la sous-partie actuelle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pas uniformément vers la fonction nulle f sur $[0,1]$.

Exercice 2

Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $I_n = \displaystyle\int_0^1 x\left(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème de dérivabilité pour une suite de fonctions

Si $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant n_0$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;

(ii) la suite $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ converge simplement sur I vers une fonction f ;

(iii) la suite $(f_n')_{n\geqslant n_0}$ converge uniformément sur I vers une fonction g ;

alors la fonction $f : I\to\mathbb{K}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $g=f'$.

Exemple 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + n^{-1}}$. La suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que f n'est pas dérivable en 0, on en déduit par le théorème ci-dessus que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Remarque 7

Si on n'a pas la convergence uniforme de la suite $(f_n')_{n\geqslant n_0}$ sur I, on peut parfois s'en sortir en appliquant le théorème sur un segment quelconque $[a, b]$ de I. Si l'hypothèse (iii) est vérifiée sur le segment $[a, b]$, alors on en déduit par le théorème que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Comme $[a, b]$ est un segment quelconque de I et que « être de classe $\mathscr{C}^1$ » est une propriété locale, on conclut que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ pour une suite de fonctions

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;

(ii) pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $(f_n^{(j)})_{n \geqslant n_0}$ converge simplement sur I vers une fonction g_j (notons $f = g_0$) ;

(iii) la suite $(f_n^{(k)})_{n \geqslant n_0}$ converge uniformément sur I vers une fonction g_k ;

alors la fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et $g_j = f^{(j)}$ pour tout $j \in [\![0, k]\!]$.

Remarque 8

Comme pour le théorème précédent, il est possible de se limiter à vérifier l'hypothèse (iii) sur tout segment de I pour conclure que f est $\mathscr{C}^{(k)}$ sur I, car « être de classe $\mathscr{C}^k$ » est une propriété locale.

Définition (Série de fonctions)

Soit $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. La série de terme général f_n, notée $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ ou $\sum f_n$, est la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f_k.$$

La suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est appelée la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$.

Remarque 9

En particulier, comme une série de fonctions est une suite de fonctions, les définitions de convergence simple sur I et de convergence uniforme sur I vues durant la première partie s'appliquent aux séries de fonctions. Nous allons néanmoins les redonner ci-dessous dans le cadre des séries de fonctions.

Définition (Convergence simple d'une série de fonctions)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I si sa suite des sommes partielles (S_n) converge simplement sur I.

Remarque 10

Étudier la convergence simple d'une série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ revient par définition à étudier pour chaque élément $x \in I$ la convergence de la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n(x)$.

Définition (Somme et reste d'une série de fonctions convergeant...)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ une série de fonctions convergeant simplement sur I dont on note $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ la suite des sommes partielles.

(i) On appelle somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ la fonction $S : I \to \mathbb{K}$ définie par $S : x \mapsto \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$.

La somme S de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ est notée $S = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f_n$.

(ii) On appelle reste d'ordre $n \in [\![n_0, +\infty [\![$ de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ la fonction $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

Remarque 11

Si $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ converge simplement sur I, alors sa suite des restes $(R_n)_{n\geqslant n_0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur I.

Exemple 6

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x\mapsto n^{-x}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur l'intervalle $]1,+\infty[$, car pour tout $x\in\,]1,+\infty[$, on remarque que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est une série de Riemann convergente.

Définition (Convergence uniforme d'une série de fonctions)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I si sa suite des sommes partielles (S_n) converge uniformément sur I.

Proposition 2

Soit $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

(i) Si $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur I, alors $\sum f_n$ converge simplement vers f sur I.

(ii) Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Exemple 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto nx\mathrm{e}^{-nx}$.

- La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$, car pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{=} o(n^{-2})$ et $\sum n^{-2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum f_n(x)$ converge par comparaison de séries à termes positifs.
- On a démontré dans l'exemple 2.c que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$, donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$ par le point (ii) de la proposition ci-dessus.

Théorème (Caractérisation de la convergence uniforme d'une série...)

Soit $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ une série de fonctions convergeant simplement sur I.
La série $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite des restes $(R_n)_{n\geqslant n_0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Remarque 12

Sauf dans quelques cas particuliers (comme celui des séries alternées), ce critère n'est pas facile à appliquer, car on ne sait pas majorer facilement le reste d'une série en général.

Exemple 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$.

- La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on remarque que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est une série alternée et la suite $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge par le théorème spécial des séries alternées.

Exemple 8

- Par le théorème spécial des séries alternées, on a la majoration du reste suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)\right|$$
$$\leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x^2} \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On conclut que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Définition (Convergence normale d'une série de fonctions)

Soit $\sum_{n \geqslant n_0} f_n$ une série de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que la série $\sum_{n \geqslant n_0} f_n$ converge normalement sur I si

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est bornée sur I ;

(ii) la série $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ converge.

Remarque 13

Si la série $\sum_{n \geqslant n_0} f_n$ converge normalement sur I, alors pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n \geqslant n_0} |f_n(x)|$ converge par comparaison de séries à termes positifs, car on a l'inégalité

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \quad \forall x \in I, \quad 0 \leqslant |f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_{\infty,I}.$$

Proposition 3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $\sum f_n$ converge normalement sur I, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Théorème (Caractérisation de la convergence normale d'une série...)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ une série de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ converge normalement sur I.

(ii) Il existe une série convergente de nombres réels $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \alpha_n$ telle que

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leqslant \alpha_n.$$

(iii) Pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant n_0}$ d'éléments de I, la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} |f_n(x_n)|$ converge.

Remarques 14

a) En pratique, le point (ii) est utilisé pour montrer qu'une série $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ converge normalement sur I.

b) En pratique, le point (iii) est utilisé pour montrer qu'une série $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ ne converge pas normalement sur I.

Exemples 9

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^3+x^2}$. Comme on a l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^3}$$

et que $\sum \dfrac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, on conclut que $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ par le point (ii) du théorème ci-dessus, donc elle converge également uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{2x}{n^2+x^2}$.
Comme $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(n)$ est une série de Riemann divergente, on conclut que $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$ par le point (iii) du théorème ci-dessus.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[a,+\infty[$ pour $a > 0$.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
4. Étudier la convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[a,+\infty[$ pour $a > 0$.
5. Étudier la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[a,+\infty[$ pour $a > 0$.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto (-1)^n \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme et la convergence normale de $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

Dans cette sous-partie, on reformule le théorème de continuité pour une suite de fonctions pour l'adapter au cadre des séries de fonctions.

Théorème de continuité pour une série de fonctions

Si $\sum_{n \geqslant n_0} f_n$ est une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est continue sur I ;

(ii) la série $\sum_{n \geqslant n_0} f_n$ converge uniformément sur I ;

alors sa somme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Exemple 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^3 + x^2}$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) On a démontré dans l'exemple 9.a que $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème de continuité ci-dessus, on en déduit que la fonction $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque 15

Si on n'a pas la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ sur I, on peut parfois s'en sortir en appliquant le théorème sur un segment quelconque $[a,b]$ de I. Si l'hypothèse (ii) est vérifiée sur le segment $[a,b]$, alors on en déduit par le théorème que la somme $f=\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a,b]$. Comme $[a,b]$ est un segment quelconque de I et que la continuité est une propriété locale, on conclut que f est continue sur I.

Exemple 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto n^{-x}$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $]1, +\infty[$.

(ii) La série $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $I =]1, +\infty[$, car on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|f_n\|_{\infty, I} = \sup_{x \in I} \left|f_n(x)\right| = \sup_{x \in I} \left|\frac{1}{n^x}\right| = \frac{1}{n}$$

et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente. On pourrait également démontré que $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.

Exemple 11

(ii) Par contre, si on considère un réel $a > 1$, alors en notant $I_a = [a, +\infty[$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|f_n\|_{\infty, I_a} = \sup_{x \in I_a} \left|f_n(x)\right| = \sup_{x \in I_a} \left|\frac{1}{n^x}\right| = \frac{1}{n^a}$$

et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ est une série de Riemann convergente. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I_a, donc $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I_a.

On conclut par le théorème de continuité ci-dessus que la fonction $\zeta = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, +\infty[$. Comme le réel $a > 1$ est arbitraire et que la continuité est une propriété locale, on en déduit que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n + n^2 x}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. On note f sa somme.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

Théorème de la double limite

Soit a une extrémité de l'intervalle I. Si $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ est une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, la fonction f_n admet une limite finie $\ell_n \in \mathbb{K}$ en a;

(ii) la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ converge uniformément sur I;

alors série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \ell_n$ converge et on a

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \ell_n.$$

DÉMONSTRATION

HORS PROGRAMME

Exemple 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto n^{-x}$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en $+\infty$. On a $\ell_1 = 1$ et $\ell_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

(ii) Dans l'exemple précédent, on a montré que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[2, +\infty[$.

On conclut par le théorème de la double limite que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ell_n$ est convergente, que la fonction $\zeta = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ admet une limite en $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ dans l'exercice précédent.

1. Montrer que la fonction f admet une limite en $+\infty$ et préciser cette limite.
2. Montrer que la fonction f est décroissante $]0,+\infty[$.
3. Montrer que la fonction f admet une limite en 0^+ et préciser cette limite.

Dans cette sous-partie, on reformule le théorème d'intégration pour une suite de fonctions pour l'adapter au cadre des séries de fonctions.

Théorème d'intégration pour une série de fonctions convergeant...

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Si $\sum\limits_{n \geqslant n_0} f_n$ est une série de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est continue sur $[a,b]$;

(ii) la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} f_n$ converge uniformément sur I ;

alors la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et on a la relation

$$\int_a^b \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \right).$$

Remarques 16

a) Par le théorème de continuité pour une série de fonctions, on sait que la fonction $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ est continue sur le segment $[a,b]$, donc on peut bien l'intégrer sur $[a,b]$.

b) Dans le théorème, on ne peut pas remplacer $[a,b]$ par un intervalle qui n'est pas un segment.

Exemple 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto n^{-x}$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $]1, +\infty[$.

(ii) On a démontré dans l'exemple 11 que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[2,3]$.

En notant $\zeta = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$, on conclut par le théorème d'intégration ci-dessus que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et qu'on a

$$\int_2^3 \zeta(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_2^3 \frac{1}{n^t}\,\mathrm{d}t = [t]_2^3 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{-\ln(n)\,n^t}\right]_2^3 = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \left(\dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x}\right)$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 2} f_n$ converge simplement sur $[0,1]$. On note f sa somme.
2. Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \ln(2)$.

Dans cette sous-partie, on reformule le théorème de dérivabilité pour une suite de fonctions pour l'adapter au cadre des séries de fonctions.

Théorème de dérivabilité pour une série de fonctions

Si $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ est une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;

(ii) la série $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ converge simplement sur I ;

(iii) la série $\sum_{n\geqslant n_0} f_n'$ converge uniformément sur I ;

alors sa somme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n'$.

Remarque 17

Si on n'a pas la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geqslant n_0} f_n'$ sur I, on peut parfois s'en sortir en appliquant le théorème sur un segment quelconque $[a,b]$ de I. Si l'hypothèse (ii) est vérifiée sur le segment $[a,b]$, alors on en déduit par le théorème que la somme $f = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Comme $[a,b]$ est un segment quelconque de I et que « être de classe $\mathscr{C}^1$ » est une propriété locale, on conclut que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Exemple 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto n^{-x}$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

(ii) On a montré dans l'exemple 6 que $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.

Exemple 14

(iii) On considère un réel $a > 1$ et on note $I_a = [a, +\infty[$. On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|f_n'\|_{\infty, I_a} = \sup_{x \in I_a} |f_n'(x)| = \sup_{x \in I_a} \left| \frac{-\ln(n)}{n^x} \right|$$
$$= \frac{\ln(n)}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^b}\right) \quad \text{avec} \quad b = \frac{a+1}{2} > 1.$$

Comme $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^b}$ est une série de Riemann convergente, on conclut que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \|f_n'\|_{\infty, I_a}$ converge par comparaison de séries à termes positifs, donc $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur I_a.

Exemple 14

On conclut par le théorème de dérivabilité ci-dessus que la fonction $\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. Comme le réel $a > 1$ est arbitraire et que « être de classe $\mathscr{C}^1$ » est une propriété locale, on en déduit que ζ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$. De plus, on a par le théorème que

$$\forall x \in\,]1, +\infty[, \quad \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}.$$

Exercice 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. On note f sa somme.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et préciser sa dérivée.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.

Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ pour une série de fonctions

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $\sum\limits_{n \geqslant n_0} f_n$ est une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;

(ii) pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;

(iii) la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I ;

alors sa somme $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et sa dérivée j-ème est $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f_n^{(j)}$ pour tout $j \in [\![0, k]\!]$.

Remarque 18

Comme pour le théorème précédent, il est possible de se limiter à vérifier l'hypothèse (iii) sur tout segment de I pour conclure que la somme f est $\mathscr{C}^{(k)}$ sur I, car « être de classe $\mathscr{C}^k$ » est une propriété locale.

Exemple 15

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto n^{-x}$. On considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]1, +\infty[$.

(ii) Soit $j \in [\![0, k-1]\!]$. Pour tout $x \in]1, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|f_n^{(j)}(x)\right| = \left|\frac{(-\ln(n))^j}{n^x}\right| = o\left(\frac{1}{n^y}\right) \quad \text{avec} \quad y = \frac{x+1}{2} > 1.$$

Comme $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^y}$ est une série de Riemann convergente, on conclut que $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n^{(j)}(x)$ converge absolument par comparaison de séries à termes positifs, donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n^{(j)}$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.

Exemple 15

(iii) On considère un réel $a > 1$ et on note $I_a = [a, +\infty[$. On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\| f_n^{(k)} \right\|_{\infty, I_a} = \sup_{x \in I_a} \left| f_n^{(k)}(x) \right| = \sup_{x \in I_a} \left| \frac{(-\ln(n))^k}{n^x} \right|$$
$$= \frac{\ln^k(n)}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^b}\right) \quad \text{avec} \quad b = \frac{a+1}{2} > 1.$$

Comme $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^b}$ est une série de Riemann convergente, on conclut que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \left\| f_n^{(k)} \right\|_{\infty, I_a}$ converge par comparaison de séries à termes positifs, donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n^{(k)}$ converge normalement (donc uniformément) sur I_a.

Exemple 15

On conclut par le théorème ci-dessus que la fonction $\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a, +\infty[$. Comme le réel $a > 1$ est arbitraire et que « être de classe $\mathscr{C}^k$ » est une propriété locale, on en déduit que ζ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]1, +\infty[$. Comme $k \in \mathbb{N}^*$ est un entier arbitraire, on vient de montrer que ζ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$. De plus, on a par le théorème que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \,]1, +\infty[, \quad \zeta^{(j)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(j)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^j}{n^x}.$$