TD 7 Suites et séries de fonctions

Dans toute la feuille, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Suites de fonctions

Exercice 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \begin{cases} nx^n \ln(x) & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,a]$ où $a \in [0,1[$.

Exercice 2 : Soit $a \geqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : x \mapsto n^a x^n (1-x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0,2], \quad f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}.$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \sin^n(x)\cos(x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,\pi/2]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,\pi/2]$?

Exercice 8 : Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément respectivement vers des fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ et $g : I \to \mathbb{K}$.

1. Étudier la convergence simple sur I de la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose que f et g sont bornées sur I. Montrer que la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg sur I.
3. En général, la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur I ?

Partie II Séries de fonctions

Exercice 9 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$ et sur $[-a, a]$ avec $a > 0$.
3. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$ et sur $[-a, a]$ avec $a > 0$.
4. Montrer que $\sum (-1)^n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 : On considère la fonction d'une variable réelle définie par

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction f admet une limite en $+\infty$ et préciser cette limite.
4. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de la fonction f en $+\infty$.

Exercice 11 : On considère la fonction d'une variable réelle définie par

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}.$$

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f admet une limite en $+\infty$ et préciser cette limite.
3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 : On considère la fonction d'une variable réelle définie par

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1 + n^2 x^2)}.$$

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 13 : Montrer qu'on a les égalités

$$\ln(2) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}.$$

Exercice 14 : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, calculer $I_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \,\mathrm{d}\theta$.

Exercice 15 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels positifs. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = a_n x^n (1 - x).$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.
2. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement si et seulement si la série numérique $\sum \frac{a_n}{n}$ est convergente.
3. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si la suite (a_n) converge vers 0.