CHAPITRE 2

Séries numériques

Jérôme VON BUHREN
http://vonbuhren.free.fr

Lycée Couffignal - PSI*

En mathématiques, la notion de série permet notamment de définir des nombres et des fonctions en utilisant une somme infinie. Nous étudierons par exemple les séries entières dans un chapitre ultérieur. Elles sont aussi nécessaires pour donner un cadre formel aux séries de Fourier qui sont importantes en physique et en science de l'ingénieur : elles permettent de décomposer un signal périodique en une superposition de signaux sinusoïdaux.

Dans ce chapitre, nous commencerons par faire quelques rappels de première année sur les séries numériques. Ensuite, nous introduirons de nouveaux outils pour étudier les séries numériques.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Dans cette partie, on considère une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition (Série numérique)

La série de terme général u_n, notée $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ ou $\sum u_n$, est la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

La suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est appelée la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.

Définition (Série numérique convergente et divergente)

On dit que la série $\sum u_n$ est convergente si sa suite des sommes partielles (S_n) est convergente. Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente.

Définition (Somme et reste d'une série numérique convergente)

Soit $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ une série convergente dont on note $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ la suite des sommes partielles.

(i) On appelle somme de la série la limite S de la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ et on la note $S = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

(ii) On appelle reste d'ordre $n \in [\![n_0, +\infty [\![$ de la série le nombre $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Remarques 1

a) La convergence ou la divergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

b) Si $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ une série convergente, alors sa suite des restes $(R_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0.

Exemples 1

a) La série $\sum_{n\geqslant 0} n$ est divergente, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

b) La série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exemples 1

c) La série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergente car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n+1) - \ln(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition 1

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.

Définition (Divergence grossière)

Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exemple 2

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n$ diverge grossièrement.

ATTENTION

La réciproque est fausse ! La suite (u_n) définie dans l'exemple 1c) converge vers 0, mais nous avons montré que $\sum u_n$ est divergente.

Proposition (Linéarité de la somme)

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et on a la relation

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right) + \mu \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n \right).$$

Remarque 2

On en déduit que si $\sum u_n$ est une série convergente et si $\sum v_n$ est une série divergente, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.

Définition (Série télescopique)

On appelle série télescopique toute série de la forme $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

Proposition (Lien suite-série)

La série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge. Dans ce cas, on a pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$ l'égalité

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) - u_{n_0}.$$

Exemple 3

Comme la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, on en déduit que la série télescopique $\sum_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ est convergente et que sa somme est égale à $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=1$.

Exercice 1

Étudier la convergence des séries suivantes, puis en cas de convergence, calculer leur somme.

$$(i)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}, \quad (ii)\ \sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \quad (iii)\ \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

On rappelle que pour tout $q \in \mathbb{C}$ et pour tout $(n_0, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geqslant n_0$, on a

$$\sum_{k=n_0}^{n} q^k = \begin{cases} q^{n_0} \dfrac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ n - n_0 + 1 & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}$$

Définition (Série géométrique)

Pour tout $q \in \mathbb{C}$, la série $\sum q^n$ s'appelle la série géométrique de raison q.

Proposition (Convergence d'une série géométrique)

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si on a l'inégalité $|q| < 1$. Dans ce cas, on a pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$ l'égalité

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}.$$

Exemple 4

Le série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente et sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(1/2)^0}{1-1/2} = 2.$

Exercice 2

Étudier la convergence des séries suivantes, puis en cas de convergence, calculer leur somme.

$$(i)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3^n}, \qquad (ii)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{5}{2^{3n+2}}, \qquad (iii)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n+(-3)^n}{3^n}.$$

Dans cette sous-partie, on établit un lemme fondamental sur les séries à termes positifs.

Lemme fondamental

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels positifs.

(i) La suite des sommes partielles associée à la série $\sum u_n$ est croissante.

(ii) La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si sa suite des sommes partielles est majorée.

Remarques 3

a) On en déduit que si $\sum u_n$ est une série divergente à termes positifs, alors sa suite des sommes partielles diverge vers $+\infty$. Dans ce contexte, on peut s'autoriser à noter $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

b) La relation d'ordre sur les nombres de $[0,+\infty[$ s'étend naturellement à l'ensemble $[0,+\infty]$.

c) Avec ces notations, une série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente si et seulement si on a $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n < +\infty$.

Exercice 3

Déterminer la limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ sont deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, on rappelle que l'on dit que la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est dominée par la suite $(v_n)_{n \geqslant n_0}$, ce que l'on note $u_n = O(v_n)$, si

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in [\![n_0, +\infty [\![, \quad \forall n \in [\![N, +\infty [\![, \quad |u_n| \leqslant K|v_n|.$$

Si la suite $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, la définition ci-dessus est équivalente à dire que le quotient $(u_n/v_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite bornée.

Théorème de comparaison

Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites de nombres réels positifs.

(i) Si $0\leqslant u_n\leqslant v_n$ pour tout $n\in[\![n_0,+\infty[\![$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

(ii) Si $u_n=O(v_n)$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

(iii) Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ équivaut à celle de $\sum u_n$.

Remarques 4

a) Sous l'hypothèse du (i), on a en plus l'inégalité $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

b) Sous l'hypothèse du (i) ou du (ii), on a par contraposition que la divergence de $\sum u_n$ implique celle de $\sum v_n$.

c) L'assertion (i) reste valable si l'inégalité $0\leqslant u_n\leqslant v_n$ n'est que vérifiée à partir d'un certain rang.

d) L'assertion (ii) reste valable si on remplace $u_n=O(v_n)$ par $u_n=o(v_n)$.

Exemples 5

a) On souhaite étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{\cos(n)-n}$. On remarque que l'on a l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant e^{\cos(n)-n} \leqslant e^{1-n} = e \cdot e^{-n}$$

et que $\sum e^{-n}$ est une série géométrique convergente, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{\cos(n)-n}$ converge par comparaison.

Exemples 5

b) On souhaite étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$. Par croissance comparée, on remarque que

$$n^2\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right) = \frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(n)}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, on conclut que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

Exemples 5

c) On souhaite étudier la convergence de la série $\sum \sin\left(2^{-n}\right)$. On remarque que l'on a l'équivalent

$$\sin\left(2^{-n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2^{-n} \geqslant 0$$

et que $\sum 2^{-n}$ est une série géométrique convergente, donc la série $\sum \sin\left(2^{-n}\right)$ converge par comparaison.

Exercice 4

Étudier la convergence des séries suivantes.

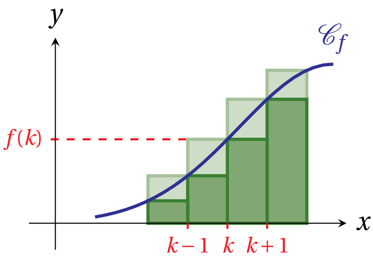
$$(i)\ \sum \frac{2^n+n}{3^n+\ln(n)}, \qquad (ii)\ \sum \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}, \qquad (iii)\ \sum \frac{\sin^2(n)}{2^n},$$

$$(iv)\ \sum \frac{n^2}{4^n}, \qquad (v)\ \sum \frac{\ln(n)}{n}.$$

Dans cette partie, on considère une fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et monotone où $a \in \mathbb{R}$. Nous allons voir une méthode permettant d'obtenir des encadrements de sommes dont le terme général est de la forme $f(n)$.

Pour commencer, on détermine un encadrement du terme général de la somme en distinguant deux cas selon les variations de la fonction f.

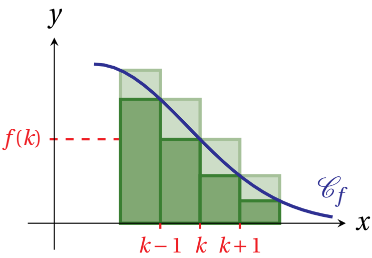
Cas d'une fonction croissante



Dans ce cas, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $k \geqslant a+1$, on a l'inégalité

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cas d'une fonction décroissante



Dans ce cas, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $k \geqslant a+1$, on a l'inégalité

$$\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il suffit ensuite d'additionner l'inégalité précédente pour les valeurs adéquates de l'indice k pour obtenir un encadrement de la somme étudiée.

La méthode de comparaison série-intégrale permet d'étudier la convergence de certaines séries numériques.

Exemple 6

On souhaite déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+1}$. Pour ce faire, nous allons encadrer sa suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+1}.$$

Exemple 6

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$, donc on a l'encadrement

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \leqslant \frac{1}{k^2+1} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient en sommant ces inégalités pour $k \in [\![1, n]\!]$ que

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1} \leqslant \int_0^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$

Exemple 6

En calculant ces intégrales, on aboutit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ à l'inégalité

$$\operatorname{Arctan}(n+1) - \frac{\pi}{4} \leqslant S_n - 1 \leqslant \operatorname{Arctan}(n)$$
$$\Leftrightarrow \qquad \operatorname{Arctan}(n+1) - \frac{\pi}{4} + 1 \leqslant S_n \leqslant \operatorname{Arctan}(n) + 1.$$

Comme la fonction Arctan est majorée par $\dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par le réel $\dfrac{\pi}{2}+1$. Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+1}$ est une série à termes positifs, on conclut qu'elle converge.

Exemple 7

On souhaite déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Pour ce faire, nous allons encadrer sa suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, donc on a l'encadrement

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

Exemple 7

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on obtient en sommant ces inégalités pour $k \in [\![2,n]\!]$ que

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

En calculant ces intégrales, on aboutit pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ à l'inégalité

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} \leqslant S_n - 1 \leqslant 2\sqrt{n} - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \leqslant S_n \leqslant 2\sqrt{n} - 1.$$

On en en déduit par minoration que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Exercice 5

En utilisant une comparaison série-intégrale, étudier la convergence des séries suivantes.

$$(i)\ \sum \frac{1}{n\ln(n)}, \qquad (ii)\ \sum \frac{1}{n\ln^2(n)}, \qquad (iii)\ \sum \frac{\ln^2(n)}{n}.$$

Définition (Série de Riemann)

On appelle série de Riemann toute série de la forme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

En appliquant la méthode de comparaison série-intégrale, on en déduit le résultat suivant.

Théorème (Convergence d'une série de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

La méthode de comparaison série-intégrale permet aussi d'obtenir des équivalents de certaines sommes.

Exemple 8

En reprenant l'exemple précédent, on a pour tout $n \in\in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ l'encadrement

$$\frac{2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{2\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}}.$$

Comme on a les égalités

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}} = 1,$$

on conclut par le théorème d'encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

Exemple 9

On souhaite déterminer un équivalent de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est continue et décroissante, donc on a l'encadrement

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}.$$

Exemple 9

Pour tout $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $1 \leqslant n \leqslant N$, on obtient en sommant ces inégalités pour $k \in [\![n+1, N]\!]$ que

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(N+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2}$$

En passant à la limite lorsque $N \to +\infty$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2n^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n^2}{(n+1)^2} \leqslant 2n^2 R_n \leqslant 1.$$

En appliquant le théorème d'encadrement, on conclut que l'on a

$$R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Exercice 6

En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent des suites suivantes.

$$(i)\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad (ii)\quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k), \qquad (iii)\quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Définition (Série alternée)

Une série de nombres réels $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est dite alternée si $u_{n+1}u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$.

Remarque 5

De manière équivalente, une série de nombres réels $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est alternée s'il existe une suite de réels positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = (-1)^n a_n$ pour tout entier $n \geqslant n_0$ ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Théorème spécial des séries alternées

Soit $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ une série alternée telle que la suite $\left(|u_n|\right)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante et converge vers 0.

(i) La série alternée $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente.

(ii) On a la majoration du reste de la série alternée suivante : pour tout entier $p \geqslant n_0$, on a

$$\left|\sum_{n=p}^{+\infty} u_n\right| \leqslant |u_p|.$$

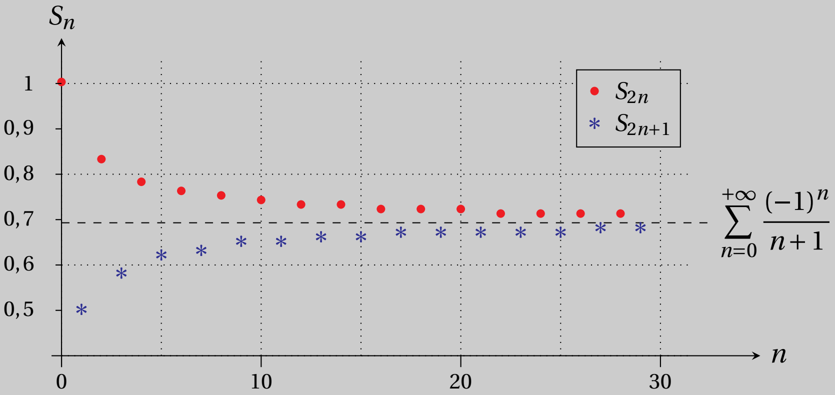
(iii) Pour tout entier $p \geqslant n_0$, le nombre $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} u_n$ est du signe de son premier terme u_p.

Exemple 10

La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente d'après le théorème des séries alternées.

Illustration

On peut représenter la suite des sommes partielles de la série précédente.



Exercice 7

Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n)}$ est convergente, puis préciser le signe de sa somme.

Exercice 8

On considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Montrer que la fonction f est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Dans cette sous-partie, on considère une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition (Convergence absolue)

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

Définition (Suite sommable)

La suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite sommable si la série $\sum u_n$ converge absolument.

Théorème 1

Si une série numérique converge absolument, alors elle converge.

Exemple 11

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \sin(n)\mathrm{e}^{-n}$. On remarque que l'on a l'inégalité

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant \left|\sin(n)\mathrm{e}^{-n}\right|\leqslant \mathrm{e}^{-n}$$

et que $\sum \mathrm{e}^{-n}$ est une série géométrique convergente, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \sin(n)\mathrm{e}^{-n}$ converge absolument par comparaison, donc elle converge.

ATTENTION

La réciproque du théorème précédent est fausse. Par exemple, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge d'après le théorème des séries alternées, mais elle ne converge pas absolument.

Exercice 9

Étudier la convergence des séries de terme général suivant.

$$(i)\ \sum \frac{\sin(n)}{2^n}, \qquad (ii)\ \sum \frac{\mathrm{i}^n}{n^2}, \qquad (iii)\ \sum n\cos(n)\sin\left(\frac{\pi}{n^3}\right).$$

Proposition (Inégalité triangulaire)

Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge absolument, alors on a l'inégalité

$$\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|.$$

Proposition (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série complexe à termes non nuls telle que

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

(i) Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.

(ii) Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(iii) Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemples 12

a) On souhaite étudier la convergence de la série $\sum u_n$ où $u_n = n^2 \mathrm{e}^{-n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \neq 0$ et

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^2 \mathrm{e}^{-(n+1)}}{n^2 \mathrm{e}^{-n}} = \frac{(n+1)^2 \mathrm{e}^{-1}}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^{-1} < 1,$$

donc la série $\sum u_n$ est convergente par la règle de d'Alembert.

b) La règle de d'Alembert ne permet pas de déterminer la nature des séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.

Exercice 10

Étudier la convergence des séries de terme général suivant.

$$(i)\ \sum \frac{(1+\mathrm{i})^n}{n^9}, \qquad (ii)\ \sum \binom{2n}{n}^{-1}, \qquad (iii)\ \sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

Dans cette sous-partie, on considère deux suites $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition (Produit de Cauchy)

Le produit de Cauchy des séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général w_n défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Théorème (Convergence du produit de Cauchy)

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ converge absolument et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

DÉMONSTRATION

On introduit (U_n), (V_n) et (W_n) les suites des sommes partielles associées respectivement aux séries de terme général u_n, v_n et w_n. On considère également les ensembles

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = [\![0, n]\!]^2, \qquad T_n = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i+j \leqslant n\right\}.$$

DÉMONSTRATION

Cas des séries à termes positifs : On suppose que (u_n) et (v_n) sont deux suites de réels positifs. Dans ce cas, en remarquant que l'on a les inclusions $T_n \subset C_n \subset T_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$\sum_{(i,j)\in T_n} u_i v_j \leqslant \sum_{(i,j)\in C_n} u_i v_j \leqslant \sum_{(i,j)\in T_{2n}} u_i v_j \qquad \Leftrightarrow \qquad W_n \leqslant U_n V_n \leqslant W_{2n}.$$

Par hypothèse, les suites (U_n) et (V_n) sont croissantes et convergent respectivement vers $U \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathbb{R}$. Ainsi, on déduit de l'inégalité précédente que la suite croissante (W_n) est majorée par UV, donc elle converge vers un nombre $W \in \mathbb{R}$. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on conclut que $W = UV$.

DÉMONSTRATION

Cas général : On remarque qu'en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$|U_nV_n - W_n| = \left|\sum_{(i,j)\in C_n\setminus T_n} u_iv_j\right| \leqslant \sum_{(i,j)\in C_n\setminus T_n} |u_iv_j|$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{n}|u_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{n}|v_j|\right) - \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k}|u_i||v_{k-i}|\right).$$

D'après le cas précédent, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus converge vers 0, ce qui permet de conclure avec le théorème d'encadrement.

Exemple 13

On souhaite étudier la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{2^n}$. On remarque pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$w_n = \frac{n+1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{n-k}}.$$

On en déduit que $\sum w_n$ est le produit de Cauchy de $\sum \frac{1}{2^n}$ avec elle-même. Cette dernière série convergeant absolument, donc on en déduit avec le théorème précédent que $\sum w_n$ converge et que l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{1-1/2}\right)^2 = 4.$$

Exercice 11

En utilisant un produit de Cauchy, justifier la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{3^n}.$$

La formule de Stirling donne un ordre de grandeur de la factorielle d'un entier en fonction de quantités ne faisant intervenir que des puissances.

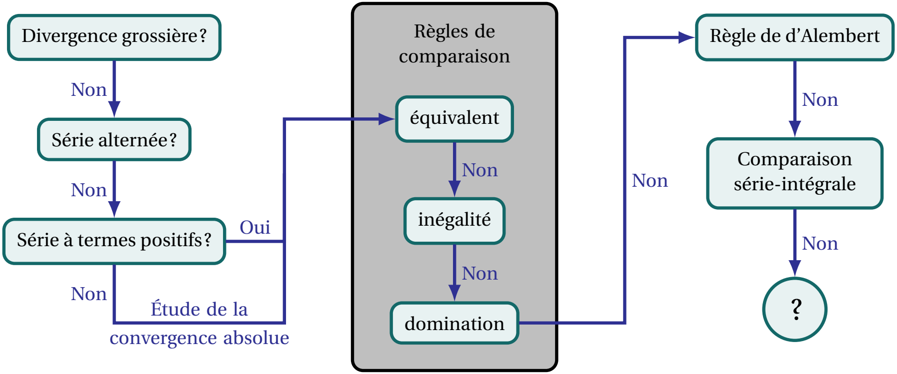
Formule de Stirling

On a l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

Exercice 12

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le graphe ci-dessous résume la démarche à suivre pour étudier la convergence d'une série $\sum u_n$ où $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.



Si $\sum u_n$ n'est pas une série alternée, qu'elle n'est pas à termes positifs et que l'on a démontré qu'elle ne converge pas absolument, on sort du cadre du programme dans le cas général.