TD 2 Séries numériques

Partie I Révisions - Suites numériques

Exercice 1 : Étudier la convergence des suites de terme général suivant.

$$(i)\ \ u_n = \frac{\cos(n) + 3\sin(n^2)}{\ln(n)},\quad (ii)\ \ u_n = \frac{3^n - e^n}{4^n - n^2},\quad (iii)\ \ u_n = \sqrt[n]{n^2},$$

$$(iv)\ \ u_n = e^{-\sqrt{n}}\ln(1+n+e^n),\quad (v)\ \ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},\quad (vi)\ \ u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}.$$

Exercice 2 : Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p + k^p}.$$

1. Montrer que si $p > 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $p < 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
3. Dans cette question, on suppose que $p = 1$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et qu'elle est convergente.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3 : On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \sin\left((3+\sqrt{5})^n \pi\right) \quad \text{et} \quad v_n = \sin\left((3-\sqrt{5})^n \pi\right).$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = 1 + \ln(u_n).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 5 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 : Déterminer la limite des suites de terme général suivant.

$$(i)\ \ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\qquad (ii)\ \ \sqrt{n}\ln\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right),\qquad (iii)\ \ \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$$

Exercice 7 : On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = S_n - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = S_n - 2\sqrt{n+1} \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire un équivalent de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8 : Étudier la convergence des suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad Q_n = P_n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 9 : Déterminer un développement asymptotique à la précision n^{-1} de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}.$$

Exercice 10 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que l'on a le développement asymptotique

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 11 : Déterminer une expression explicite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes.

(i) $u_0 = 1,\ u_1 = -1$ et $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $u_0 = 1,\ u_1 = 0$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $u_0 = 5,\ u_1 = 6$ et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(iv) $u_0 = 5,\ u_1 = 1$ et $u_{n+2} = -9u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(v) $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(vi) $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 : Soit $\theta \in \,]0,\pi[$. Déterminer une expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les conditions initiales $u_0 = u_1 = 1$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2\cos(\theta)u_{n+1} - u_n.$$

Partie II Séries numériques

Exercice 13 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que f_n est dérivable, puis déterminer deux expressions de f_n'.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} na^n$, puis en cas de convergence, calculer sa somme.

Exercice 14 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3^n \sin^3\left(\frac{\pi}{3^n}\right).$$

Montrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 15 : On rappelle que $\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Montrer la convergence des sommes suivantes et calculer leur somme.

$$(i)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}, \qquad (ii)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}, \qquad (iii)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}.$$

Exercice 16 : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $a_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$.

1. Montrer que a_p existe pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer a_p en fonction de $a_0, \dots, a_{p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que $a_p \in \mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 17 : Étudier la convergence des séries de terme général suivant.

$$(i)\ n^2\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right),\qquad (ii)\ 1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right),\qquad (iii)\ n^n e^{-n^2},$$

$$(iv)\ \frac{\cos(n)}{n^3-n},\qquad (v)\ e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\qquad (vi)\ \frac{\ln(n)}{n^2},$$

$$(vii)\ \frac{\ln^2(n)}{n},\qquad (viii)\ \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{n^n},\qquad (ix)\ \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}.$$

Exercice 18 : Étudier la convergence de la série de terme général défini par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\int_0^{\pi/n}\frac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 19 : Soit $a\in\mathbb{R}$. Étudier la convergence des séries

$$(i)\ \sum\frac{a^n}{1+a^{2n}},\qquad (ii)\ \sum\frac{n!}{n^{an}}.$$

Exercice 20 : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2).$$

1. Pour quelle valeur de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?
2. Dans ce cas, calculer la somme $\sum u_n$.

Exercice 21 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Calculer u_n+u_{n+2} pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la série $\sum u_n$.

Partie III Comparaison série-intégrale

Exercice 22 - Séries de Bertrand : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Étudier la convergence de la série $\sum\frac{1}{n^a\ln^b(n)}$.

Exercice 23 : En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent des suites suivantes.

$$(i)\ \sum_{k=1}^{n}\ln^2(k),\qquad (ii)\ \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}},\qquad (iii)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k},\qquad (iv)\ \sum_{k=n+1}^{2n}\sqrt{k}.$$

Exercice 24 : On considère la fonction d'une variable réelle

$$f:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^2+x^2}.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x>0$, encadrer $f(x)$ avec une comparaison série-intégrale.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 25 : On considère la fonction $\zeta:]1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in]1,+\infty[,\quad \zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}.$$

Déterminer un équivalent en 1^+ de la fonction ζ.

Exercice 26 : Soient la fonction $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f(x)=\frac{\sin(\ln(x))}{x}\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\int_{n-1}^{n}f(t)\,\mathrm{d}t-f(n).$$

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. Montrer que la suite $(\cos(\ln(n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.
3. En déduire que $\sum f(n)$ est divergente.

Partie IV Séries alternées

Exercice 27 : Étudier la convergence des séries suivantes.

$$(i)\ \sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right), \qquad (ii)\ \sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right),$$

$$(iii)\ \sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right), \qquad (iv)\ \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Exercice 28 : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Étudier la convergence de $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+an+b}\right)$.

Exercice 29 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Étudier la convergence la série $\sum u_n$ et de $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 30 : Justifier la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 31 : On considère la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum R_n$ est convergente.
2. Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Exercice 32 : Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \sin(\pi e n!)$.

Partie V Produit de Cauchy

Exercice 33 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que $\sum u_n$ converge absolument. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k.$$

Montrer que $\sum v_n$ converge et exprimer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

Exercice 34 : On considère la fonction $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par $f: z\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$.

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que $f(z+\omega) = f(z)f(\omega)$ pour tout $(z,\omega)\in\mathbb{C}^2$.

Partie VI Pour aller plus loin

Exercice 35 - Transformation d'Abel : Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On définit les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\quad b_n = B_{n+1} - B_n.$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$$
2. En déduire que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels décroissante convergeant vers 0, alors la série $\sum a_n B_n$ est convergente.
3. Montrer que la série $\sum \frac{\sin(n)}{n+1}$ est convergente.