CHAPITRE 9

Séries entières

Jérôme VON BUHREN
http://vonbuhren.free.fr

Lycée Couffignal - PSI*

Une série entière est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{C}$ de la forme

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{avec} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Au XVIIe siècle, les découvertes de Brook Taylor ont initié le développement d'une méthode de résolution pour les équations différentielles linéaires (que nous verrons dans un chapitre ultérieur) en recherchant les solutions sous la forme d'une série entière.

Dans ce chapitre, nous commencerons par étudier les résultats généraux portant sur la convergence des séries entières. Dans un second temps, nous établirons les propriétés remarquables d'une fonction réelle définie par la somme d'une série entière. Finalement, nous verrons que la plupart des fonctions usuelles s'écrivent sous la forme d'une somme de série entière.

Dans tout le chapitre, on considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Définition (Série entière)

Une série entière est une série de fonctions $\sum f_n$ où la fonction $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est de la forme $f_n : z \mapsto a_n z^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notation

Par abus de notation, la série entière de la définition ci-dessus se note simplement $\sum a_n z^n$.

Remarque 1

Pour $z = 0$, tous les termes de la série sont nuls sauf éventuellement celui d'indice $n = 0$ qui est a_0.

Lemme d'Abel

Si la suite $\left(a_n z_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour un nombre complexe $z_0 \in \mathbb{C}$, alors pour tout élément $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition (Rayon de convergence)

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est défini par

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } \left(a_n r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\} \in [0, +\infty].$$

Remarque 2

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n z^{n+1}$ ont le même rayon de convergence.

Proposition 1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 0$.

(i) Si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.

(ii) Si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

ATTENTION

Il n'y a pas de règle générale pour la convergence de la série $\sum a_n z^n$ pour les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = R$. Il faut étudier au cas par cas.

Remarques 3

a) Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, il suffit de déterminer pour quelle complexe $z \in \mathbb{C}$ la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

b) On déduit de la proposition précédente que l'on a l'égalité

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right\} \in [0, +\infty].$$

Exemple 1

On cherche le rayon de convergence R de la série entière $\sum n2^n z^n$. Pour tout nombre $z \in \mathbb{C}^*$, en notant $u_n = n2^n z^n$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)2^{n+1}|z|^{n+1}}{n2^n|z|^n} = \frac{2(n+1)}{n}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2|z|.$$

Par la règle de d'Alembert, on en déduit que la série $\sum n2^n z^n$ converge absolument si $2|z| < 1$ et diverge grossièrement si $2|z| > 1$.
On en déduit que $R = 1/2$.

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$(i)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{3^n} z^n, \qquad (ii)\ \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n^2} z^n, \qquad (iii)\ \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n},$$

$$(iv)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}, \qquad (v)\ \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n n! z^n, \qquad (vi)\ \sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} z^{4n},$$

$$(vii)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{n+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}n} z^{2n}, \qquad (viii)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{(1+\mathrm{i})^n z^{3n}}{n2^n}, \qquad (ix)\ \sum_{n\geqslant 0} z^{n^2}.$$

Définition (Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 0$.

(i) Le disque ouvert de centre $0 \in \mathbb{C}$ et de rayon R est appelé le disque ouvert de convergence.

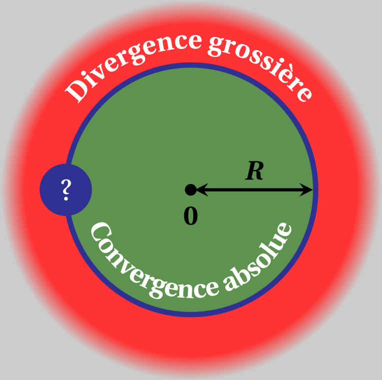
(ii) L'intervalle $]-R, R[$ est appelé intervalle ouvert de convergence.

Remarque 4

Si $R = +\infty$ le disque ouvert de convergence est $\mathbb{C}$ et l'intervalle ouvert de convergence est $\mathbb{R}$.

Illustration

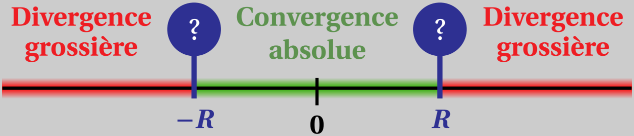
On peut résumer la situation avec les deux figures ci-dessous.



Disque ouvert de convergence

Illustration

On peut résumer la situation avec les deux figures ci-dessous.



Intervalle ouvert de convergence

Théorème de comparaison

Soient R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

(i) Si on a l'inégalité $|a_n| \leqslant |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on a $R_a \geqslant R_b$.

(ii) Si on a la relation $|a_n| = O(|b_n|)$, alors on a $R_a \geqslant R_b$.

(iii) Si on a l'équivalent $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$, alors on a $R_a = R_b$.

Remarques 5

a) L'assertion (i) reste valable si l'inégalité $|a_n| \leqslant |b_n|$ n'est que vérifiée à partir d'un certain rang.

b) L'assertion (ii) reste valable si on remplace $|a_n| = O(|b_n|)$ par $|a_n| = o(|b_n|)$.

Exemples 2

a) Comme on a $|\sin(n)| \leqslant |1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est 1, on en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \sin(n) z^n$ est supérieur ou égal à 1.

b) Comme on a $\left|\sin\left(2^{-n}\right)\right| \underset{+\infty}{\sim} |2^{-n}|$ et que le rayon de convergence de la série entière $\sum 2^{-n} z^n$ est 2, on en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \sin\left(2^{-n}\right) z^n$ est 2.

Exercice 2

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n z^n$ vérifie $R \geqslant 1$.

Proposition 2

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Exemple 3

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha z^n$ est $R = 1$.

Proposition (Somme de deux séries entières)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b. Le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie l'inégalité $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Remarque 6

Si $R_a \neq R_b$, alors on a l'égalité $R = \min(R_a, R_b)$.

Proposition (Produit de Cauchy de deux séries entières)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b. Le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Exemple 4

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$, on a d'après le théorème précédent que

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 1 \times 1\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n.$$

Remarque 7

On peut résumer les deux propositions précédentes : sur un intervalle ouvert où les deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent, on peut en effectuer la somme et le produit de Cauchy.

Exercice 3

Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ tel que $a\neq b$. On considère la fonction $f:\mathbb{C}\setminus\{a,b\}\to\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{a,b\},\quad f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}.$$

Montrer que la fonction ci-dessus est la somme d'une série entière dont on précisera le rayon de convergence en utilisant les deux méthodes ci-dessous.

(i) Avec une décomposition en élément simple.

(ii) Avec un produit de Cauchy.

Dans cette partie, on étudie les propriétés de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence. Par conséquent, on désigne la variable par x à la place z.

Si la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $R \geqslant 0$, alors les résultats de la partie précédente impliquent que sa fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur un intervalle I de la forme

$$I =]-R, R[, \quad I = [-R, R[, \quad I =]-R, R] \quad \text{ou} \quad I = [-R, R].$$

De plus, on a toujours $0 \in I$ et $f(0) = a_0$.

Lemme fondamental

La série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence.

Théorème de continuité

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors sa fonction somme $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur son intervalle ouvert de convergence.

Théorème de dérivation terme à terme

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors sa fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence. De plus, on a

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Remarques 8

a) D'après la dernière proposition de la sous-partie I.C, la série entière définissant f et celle définissant f' ont le même rayon de convergence.

b) Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}.$$

Exemple 5

On considère la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

La série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, donc d'après le théorème ci-dessus, on a

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

Exercice 4

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Théorème de primitivation

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors une primitive de sa fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ est la fonction F définie par

$$\forall x \in]-R, R[, \quad F(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Remarques 9

a) Plus précisément, la fonction F définie dans le théorème est la primitive de f qui s'annule en 0.

b) D'après la dernière proposition de la sous-partie I.C, la série entière définissant f et celle définissant F ont le même rayon de convergence.

Exemple 6

La série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. En appliquant le théorème précédent avec le nombre $x = 1/2 \in]-1, 1[$, on obtient que

$$\begin{aligned}\ln(2) = \left[-\ln(1-t)\right]_0^{1/2} = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{1-t} &= \int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{1/2} t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.\end{aligned}$$

Exercice 5

Montrer qu'on a les égalités

$$\pi = 6\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$

Définition (Fonction développable en série entière)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est développable en série entière s'il existe un intervalle non vide $]-r, r[\subset I$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que

$$\forall x \in \,]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Cette égalité est appelée le développement en série entière de la fonction f.

Proposition 3

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est développable en série entière, alors il existe un intervalle non vide $]-r, r[\subset I$ tel que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Définition (Série de Taylor)

La série de Taylor associé à une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 est la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Remarques 10

a) Toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ ne sont pas développables en série entière :
   - il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont la série de Taylor a un rayon de convergence nul ;
   - il existe des fonctions f de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont la série de Taylor a un rayon de convergence non nul et dont la somme est différente de f.

Remarques 10

b) Si $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, on peut démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ avec des intégrations par parties la formule de Taylor avec reste intégral suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que la fonction f est développable en série entière sur $]-r, r[$ si et seulement si

$$\forall x \in]-r, r[, \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Corollaire (Unicité du développement en série entière)

Si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont deux séries entières qui convergent sur l'intervalle $]-r,r[$ avec $r>0$, alors on a

$$\forall x \in\,]-r,r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n.$$

Dans cette partie, nous allons déterminer les développements en série entière des fonctions usuelles. Pour déterminer un développement en série entière, nous utilisons principalement les deux méthodes ci-dessous.

- Utilisation d'une formule de Taylor pour majorer le reste (voir la dernière remarque de la partie précédente).
- Utilisation d'une équation différentielle et de l'unicité d'un problème de Cauchy.

Voici le développement en série entière des fonctions usuelles.

Développement en série entière	**Intervalle ouvert de convergence**	**Rayon de convergence**
$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$I =]-1,1[$	$R = 1$
$\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	$I =]-1,1[$	$R = 1$
$\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$	$I =]-1,1[$	$R = 1$
$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$I =]-1,1[$	$R = 1$
$\mathrm{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$I =]-1,1[$	$R = 1$

Voici le développement en série entière des fonctions usuelles.

Développement en série entière	**Intervalle ouvert de convergence**	**Rayon de convergence**
$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$I = \mathbb{R}$	$R = +\infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$I = \mathbb{R}$	$R = +\infty$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$I = \mathbb{R}$	$R = +\infty$
$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$I = \mathbb{R}$	$R = +\infty$
$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$I = \mathbb{R}$	$R = +\infty$

Voici le développement en série entière des fonctions usuelles.

Développement en série entière	**Intervalle ouvert de convergence**
$(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$I =]-1,1[$

Rayon de convergence
$R = 1$

si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

Remarque 11

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est $R = +\infty$, car les termes de la somme sont nuls à partir d'un certain rang. De plus, le développement en série entière correspond à la formule du binôme de Newton dans ce cas.

Exercice 6

Soit $a > 0$. Calculer le développement en série entière des fonctions suivantes et préciser leur rayon de convergence.

$$(i)\ f : x \mapsto a^x, \qquad (ii)\ f : x \mapsto \mathrm{e}^{a+x},$$
$$(iii)\ f : x \mapsto \ln(a+x), \qquad (iv)\ f : x \mapsto \frac{1}{a-x}.$$

Exercice 7

Calculer le développement en série entière des fonctions ci-dessous et préciser leur rayon de convergence.

$$(i)\ f : x \mapsto \sin^3(x), \quad (ii)\ f : x \mapsto \ln\left(x^2+x+1\right), \quad (iii)\ f : x \mapsto \ln\left(x^2-3x+2\right),$$
$$(iv)\ f : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}, \quad (v)\ f : x \mapsto \frac{1}{x^2+5x+6}, \quad (vi)\ f : x \mapsto \frac{x}{(x-2)(x^2-1)}.$$

Exercice 8 (Développement de la fonction sinus intégral)

Calculer le développement en série entière en précisant le rayon de convergence de la fonction sinus intégral $\mathrm{Si} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t.$$

Rappelons que dans le chapitre portant sur les espaces vectoriels normés, nous avons définis la notion de continuité pour une application $f : A \to \mathbb{C}$ où A est une partie non vide de l'espace vectoriel normée $\mathbb{C}$.

Théorème de continuité

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors sa fonction somme $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

DÉMONSTRATION

HORS PROGRAMME

Théorème 1

Pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, on a l'égalité $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

Rappelons que l'exponentielle d'un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est le nombre défini par

$$\exp(z) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)).$$

Théorème 2

Pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on a l'égalité $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Exercice 9

Calculer le développement en série entière des fonctions ci-dessous et préciser leur rayon de convergence.

$$(i)\ \ f : x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+2}, \qquad (ii)\ \ f : x \mapsto \mathrm{e}^{x}\cos(x), \qquad (iii)\ \ f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin^3(x).$$