RÉVISIONS Polynômes

Dans toute la feuille, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Généralités

Exercice 1 : Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$P(-1) = 1, \quad P(0) = -1 \quad \text{et} \quad P(1) = -1.$$

Exercice 2 : Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right) P(X)$.

Exercice 3 : Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P \circ P = P$.

Exercice 4 : Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\left(P'\right)^2 = 4P$.

Exercice 5 : Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X^2+1)P'' = 6P$.

Exercice 6 : Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Exercice 7 - Formule de Cauchy : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que

$$P^{(k)}(0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\, \mathrm{d}t.$$

2. En déduire que si P est unitaire, alors il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $|P(z)| \geqslant 1$.

Partie II Racines d'un polynôme

Définition (Multiplicité d'une racine) : On dit que $a \in \mathbb{K}$ est une racine d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P(X) = (X-a)^m Q(X) \quad \text{et} \quad Q(a) \neq 0.$$

Proposition : Soit $a \in \mathbb{K}$ une racine d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. La racine a de P est de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0.$$

Remarques 1 :

a) On en déduit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est à racines simples dans $\mathbb{K}$ si et seulement si P et P' n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{K}$.

b) Si $a \in \mathbb{C}$ est une racine d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de multiplicité $m \geqslant 2$, alors a est une racine de $P' \in \mathbb{K}[X]$ de multiplicité $m-1$.

Exercice 8 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la multiplicité de 1 comme racine de

$$P_n(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n \in \mathbb{R}[X].$$

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Montrer que le polynôme $X^n + X + 1$ n'a que des racines simples sur $\mathbb{C}$.

Proposition : Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non nul, alors le nombre de racines de P comptées avec multiplicité est majorée par le degré de P.

Exercice 10 : Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

Exercice 11 : Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(0) = 0 \quad \text{et} \quad P\left(X^2+1\right) = P(X)^2 + 1.$$

Partie III Factorisation de polynômes

Exercice 12 : Factoriser $P = X^3 - (2+\mathrm{i})X^2 + 3X + \mathrm{i} - 2$ dans $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il admet une racine réelle.

Exercice 13 : Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P_n = X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1 \in \mathbb{R}[X].$$

Exercice 14 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $P(X) = X^n - 1$.

1. Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$. En déduire une expression des produits
$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{2}{2-\omega^k}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right).$$
3. Déterminer une expression du produit
$$\prod_{k=0}^{n-1}\prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq k}}^{n-1}(\omega^k - \omega^\ell).$$

Exercice 15 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[\pi]$. Montrer que le polynôme P_n défini ci-dessous est scindé sur $\mathbb{R}$.

$$P_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)X^k.$$

Partie IV Application de l'analyse aux polynômes

Exercice 16 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 17 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $P^2 + a^2$ n'a que des racines simples.
3. Montrer pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ que le polynôme $P' + aP$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 : On considère pour $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_n = [(X^2-1)^n]^{(n)}$.

1. Calculer le degré et le coefficient dominant de P_n.
2. Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Partie V Relations entre coefficients et racines

Proposition (Relations coefficients / racines) : Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}^*$ scindé sur $\mathbb{K}$ que l'on écrit

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = a_d \prod_{i=1}^{d}(X - z_i).$$

avec $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ et $(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{K}^d$, alors on a les relations

$$\sum_{k=1}^{d} z_k = -\frac{a_{d-1}}{a_d} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{d} z_k = (-1)^d\frac{a_0}{a_d}.$$

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $P(X) = (X+\mathrm{i})^n - (X-\mathrm{i})^n \in \mathbb{C}[X]$.

1. Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}$.
2. En déduire
$$\prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 20 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. Montrer que la moyenne des racines des racines de P est la même que la moyenne des racines de P'.