RÉVISIONS Nombres complexes

Partie I Généralités

Exercice 1 : Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants.

$$(i)\ z_1 = (2+2\mathrm{i})^6, \qquad (ii)\ z_2 = \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}, \qquad (iii)\ z_3 = \frac{(1+\mathrm{i})^{2000}}{(\mathrm{i}-\sqrt{3})^{1000}}.$$

Exercice 2 : Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n$ soit un réel.

Exercice 3 : Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 1$. Montrer que

$$|z| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+z}{1-z} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

Exercice 4 : Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|.$$

Exercice 5 : On considère l'application $f : \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}, \quad f(z) = \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
2. Montrer que f réalise une bijection de D sur P avec

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \quad \text{et} \quad P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}.$$

Partie II Nombres complexes et trigonométrie

Exercice 6 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$(i)\quad \cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$(ii)\quad \sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Exercice 7 : Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire une expression de $\cos(\pi/10)$.

Exercice 8 : Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(i)\quad \cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x) = 0, \qquad (ii)\quad \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0.$$

Exercice 9 : Linéariser les expressions suivantes.

$$(i)\ \cos^5(x), \qquad (ii)\ \sin^5(x), \qquad (iii)\ \cos^2(x)\sin^3(x), \qquad (iv)\ \cos^3(x)\cos(3x).$$

Exercice 10 : Soit $(n, a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^2$ avec $b \not\equiv 0\ [2\pi]$. Calculer les sommes suivantes.

$$(i)\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb), \qquad (ii)\quad T_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb).$$

Exercice 11 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les sommes suivantes.

$$(i)\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x+ky), \qquad (ii)\quad T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(x+ky).$$

Exercice 12 : On considère $\theta \in]-\pi, \pi[$ et on note $t = \tan(\theta/2)$. Montrer que

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Partie III Équation du second degré

Définition (Racine carrée) : On dit qu'un nombre $\delta \in \mathbb{C}$ est une racine carrée d'un nombre $z \in \mathbb{C}$ si $z = \delta^2$.

Rappel : En écrivant $\delta = x + \mathrm{i}y$ et $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$, l'équation $z = \delta^2$ est équivalente au système

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{Re}(z) & = & \mathrm{Re}\left(\delta^2\right) \\ \mathrm{Im}(z) & = & \mathrm{Im}\left(\delta^2\right) \\ |z| & = & \delta^2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} a & = & x^2 - y^2 \\ b & = & 2xy \\ \sqrt{a^2+b^2} & = & x^2+y^2. \end{array}\right.$$

ce qui permet de déterminer les racines carrées de $z \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique.

Exercice 13 : Trouver les racines carrées sous forme algébrique de

$$z_1 = 3 + 4\mathrm{i}, \qquad z_2 = 8 - 6\mathrm{i}, \qquad z_3 = 5 - 12\mathrm{i}.$$

Exercice 14 : Trouver les racines carrées sous forme algébrique de $1 + \mathrm{i}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Proposition : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. En notant $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée du nombre $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$, les racines du polynômes $aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$ sont

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} \in \mathbb{C}.$$

Exercice 15 : Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ ci-dessous.

$$(i) \;\; z^2 - 2\mathrm{i}z - 1 + 2\mathrm{i} = 0, \qquad (ii) \;\; z^2 - (1+\mathrm{i})z + 2 - \mathrm{i} = 0.$$

Exercice 16 : Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$ l'équation $z^4 - (5 - 14\mathrm{i})z^2 - 24 - 10\mathrm{i} = 0$.

Partie IV Racines de l'unité

Définition (Racines n-ième) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un nombre $z \in \mathbb{C}$ est une racine n-ième d'un nombre $a \in \mathbb{C}$ si $z^n = a$.

Proposition : Si $a = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors les racines n-ième de a sont les nombres $z_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Exercice 17 : Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$ les équations suivantes.

$$(i)\; z^5 = -\mathrm{i}, \qquad (ii)\; z^6 = \frac{-4}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}, \qquad (iii)\; z^3 = 4\sqrt{2}(1+\mathrm{i}).$$

Exercice 18 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} - (1+2\mathrm{i})z^n - 1 + \mathrm{i} = 0$.

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$ les équations suivantes.

$$(i) \;\; (z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n, \qquad (ii) \;\; z^n = \bar{z}.$$

Exercice 20 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer les expressions

$$(i) \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z^p, \qquad (ii) \prod_{z \in \mathbb{U}_n} z, \qquad (iii) \sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1|.$$

Partie V Applications des complexes à la géométrie

Exercice 21 : Déterminer les points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes respectives z, z^2, z^4 sont alignés.

Exercice 22 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines n-ième d'un élément $a \in \mathbb{U}$. Montrer que les points d'affixes $0, (1+z_1)^n, \ldots, (1+z_n)^n$ sont alignés.