Révisions Fonctions rationnelles

Dans toute la feuille, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Quelques rappels de cours

Définition (Fonctions rationnelles) : Une fonction rationnelle est une application de la forme $f : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec Q non nul.

Remarques 1 :

a) L'ensemble de définition de la fonction f ci-dessus est $D_f = \mathbb{K} \setminus Z_Q$ où Z_Q désigne l'ensemble des racines du polynôme Q dans $\mathbb{K}$.

b) Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une fonction rationnelle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.

Théorème (Décomposition en éléments simples) : Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec Q non nul. Si Q est scindé à racines simples $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{K}$, alors il existe un polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{a_1, \ldots, a_d\}, \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^{d} \frac{\lambda_k}{x - a_k}.$$

Remarques 2 :

a) Le polynôme E est appelé partie entière de la fonction rationnelle f.

b) Le polynôme E est le quotient de la division euclidienne de P par Q.

c) En particulier, on a $\deg(P) < \deg(Q)$ si et seulement si $E = 0$.

Proposition : En reprenant les hypothèses et les notations du théorème précédent, on a les expressions suivantes.

(i) Pour tout $\ell \in [\![1, d]\!]$, on a

$$\lambda_\ell = \lim_{x \to a_\ell} (x - a_\ell) f(x).$$

(ii) Pour tout $\ell \in [\![1, d]\!]$, on a

$$\lambda_\ell = \frac{P(a_\ell)}{Q'(a_\ell)}.$$

Exemple 1 : Décomposons en éléments simples la fonction rationnelle

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 4x + 3}.$$

En remarquant que $X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$, on constate que le dénominateur est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème précédent : il existe $E \in \mathbb{R}[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{1, 3\}, \quad f(x) = \frac{x^3}{(x-1)(x-3)} = E(x) + \frac{\lambda}{x-1} + \frac{\mu}{x-3}.$$

En posant la division euclidienne de X^3 par $X^2 - 4X + 3$, on obtient que $E = X + 4$. D'autre part, avec la proposition précédente, on a

$$\lambda = \lim_{x \to 1} (x-1) f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3}{x-3} = -\frac{1}{2}$$
$$\mu = \lim_{x \to 3} (x-3) f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^3}{x-1} = \frac{27}{2}.$$

Remarque 3 : Dans le cas où Q n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$, il est également possible d'effectuer une décomposition en éléments simples, mais la forme générique à obtenir doit être fournie en accord avec le programme.

Partie II Quelques exercices

Exercice 1 : Décomposer en éléments simples les fonctions rationnelles suivantes.

$$(i)\ f : x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}, \qquad (ii)\ f : x \mapsto \frac{x}{x^3-1}.$$

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples les fonctions rationnelles suivantes.

$$(i)\ f : x \mapsto \frac{n!}{x(x-1)\cdots(x-n)}, \quad (ii)\ f : x \mapsto \frac{1}{x^n-1}, \quad (iii)\ f : x \mapsto \frac{x^{n-1}}{x^n-1}.$$

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n-ième de la fonction rationnelle

$$f : x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}.$$

Exercice 4 : On considère la fonction rationnelle

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Calculer les intégrales suivantes.

$$(i)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4)(x+1)}, \qquad (ii)\ \int_0^1 \frac{x^4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6 : Calculer la somme des séries convergentes suivantes.

$$(i)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \qquad (ii)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n^4+n^2+1}.$$

Exercice 7 : On considère la fonction rationnelle

$$f : x \mapsto \frac{x}{(x+1)(x-2)^2}.$$

1. Déterminer un triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,2\}, \quad f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}.$$

2. Déterminer la dérivée n-ième de la fonction rationnelle f pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer une primitive de f.

Exercice 8 : On considère la fonction rationnelle

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)}.$$

1. Déterminer un quadruplet $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \quad f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$.

1. Décomposer en éléments simples la fonction rationnelle $f : t \mapsto \dfrac{1}{P(t)}$.
2. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k P'(z_k)}.$$