RÉVISIONS Convexité des fonctions

Partie I Quelques rappels de cours

Dans cette partie, on considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Définition (Fonction convexe/concave) : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

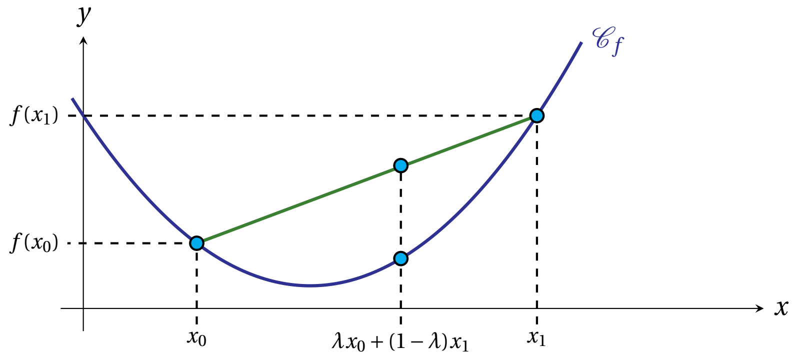
1. On dit que la fonction f est convexe si

$$\forall (x_0, x_1) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1\big) \leqslant \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_1).$$

2. On dit que la fonction f est concave si

$$\forall (x_0, x_1) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1\big) \geqslant \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_1).$$

Illustration : Par définition, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est est convexe si et seulement si sa courbe représentative se situe toujours en dessous de ses cordes.



Remarque : La fonction f est convexe si et seulement si $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Proposition : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivables sur I.

(i) La fonction f est convexe sur I si et seulement f'' est positive sur I.

(ii) La fonction f est concave sur I si et seulement f'' est négative sur I.

Proposition : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

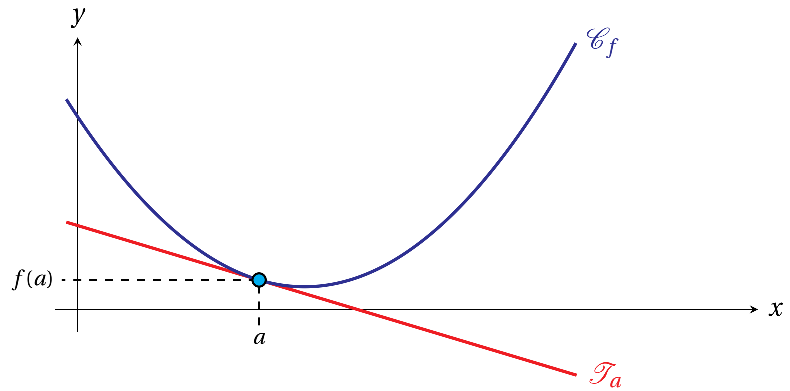
(i) Si f est convexe sur I, alors le graphe de f est au-dessus de ses tangentes, i.e.

$$\forall a \in I, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \geqslant (x-a) f'(a) + f(a).$$

(ii) Si f est concave sur I, alors le graphe de f est au-dessous de ses tangentes, i.e.

$$\forall a \in I, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \leqslant (x-a) f'(a) + f(a).$$

Illustration : La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction convexe f ci-dessous est au-dessus de sa tangente $\mathscr{T}_a$ au point de coordonnées $(a, f(a))$.



Partie II Quelques exercices

Exercice 1 : Montrer que $\exp(x) \geqslant 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Montrer que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in \,]-1, +\infty[$.

Exercice 3 : Montrer que $|\mathrm{Arctan}(x)| \leqslant |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 : Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad \frac{2}{\pi} x \leqslant \sin(x) \leqslant x.$$

Exercice 5 : On considère la fonction $f : x \longmapsto \ln\big(\ln(x)\big)$.

1. Montrer que f est concave sur $]1, +\infty[$.
2. En déduire pour tout $(x, y) \in \,]1, +\infty[^2$ que

$$\sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leqslant \ln\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Exercice 6 : On considère la fonction $f : x \longmapsto \ln\big(1 + \mathrm{e}^x\big)$.

1. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire pour tout $(x, y) \in \,]0, +\infty[^2$ que

$$1 + \sqrt{xy} \leqslant \sqrt{(1+x)(1+y)}.$$

Exercice 7 : Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair tels que la fonction $f : t \longmapsto P(t)$ est convexe.

Exercice 8 : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y'' = \mathrm{e}^x y$.

1. Montrer que f^2 est convexe.
2. Montrer que si f s'annule deux fois sur $\mathbb{R}$, alors f est la fonction nulle.

Exercice 10 - Inégalité de Hermite-Hadamard : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$