

## CHAPITRE 6

# Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Jérôme VON BUHREN

<http://vonbuhren.free.fr>

**Lycée Couffignal - PSI\***

Considérons un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps  $\mathbb{K}$ . Pour chaque base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , nous savons associer à  $f$  sa matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Pour faciliter la résolution de nombreux problèmes en algèbre linéaire (calcul des puissances d'une matrice par exemple), nous souhaiterions pouvoir choisir la base  $\mathcal{B}$  de  $E$  de telle sorte que la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  soit la plus simple possible.

En pratique, nous souhaiterions déterminer une base  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  de  $E$  telle que la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  soit diagonale, c'est à dire

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (*)$$

D'un point de vue matriciel, le problème se reformule via la formule du changement de base. Nous étudierons à quelles conditions une matrice carrée  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est-elle semblable à une matrice diagonale, c'est à dire

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \quad \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Plus généralement, il est naturel de se demander à quelles conditions deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont semblables, mais ce problème dépasse le cadre du programme.

En pratique, nous souhaiterions déterminer une base  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  de  $E$  telle que la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  soit diagonale, c'est à dire

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Par définition, la relation (\*) se traduit par  $f(v_i) = \lambda_i v_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Cette remarque nous amènera à étudier les couples  $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times E$  avec  $v \neq 0_E$  vérifiant la relation  $f(v) = \lambda v$ . Nous déterminerons ensuite des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une base  $\mathcal{B}$  vérifiant (\*).

---

Dans tout le chapitre, on désigne par  $\mathbb{K}$  le corps  $\mathbb{R}$  ou le corps  $\mathbb{C}$ .

Dans cette partie, on considère un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

**Définition (Élément propre d'un endomorphisme)**

- (i) On dit qu'un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de l'endomorphisme  $f$  s'il existe un vecteur  $v \in E$  non nul tel que  $f(v) = \lambda v$ .
- (ii) On dit qu'un élément  $v \in E$  est un vecteur propre de l'endomorphisme  $f$  s'il est non nul et s'il existe un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f(v) = \lambda v$ .

### Remarques 1

- a) Un vecteur  $v \in E$  non nul est un vecteur propre de  $f$  si et seulement si la droite vectorielle  $\text{Vect}(v)$  est stable par  $f$ .
- b) L'équation  $f(v) = \lambda v$  d'inconnue  $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times E \setminus \{0_E\}$  est appelée équation aux éléments propres.

### Exemple 1

Soit  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  l'endomorphisme défini par  $f : P \mapsto P + XP'$ .

On a  $f(X) = 2X$ , donc  $X$  est un vecteur propre de  $f$  pour la valeur propre 2.

### Définition (Sous-espace propre)

Le sous-espace propre de  $f$  associé à une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$  de  $f$  est le sous-espace vectoriel  $E_\lambda(f) = \text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - f)$ .

### Remarques 2

- Le sous-espace propre  $E_\lambda(f)$  est l'ensemble constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de  $f$  associés à la valeur propre  $\lambda$ .
- Si  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes de  $E$  qui commutent, alors les sous-espaces propres de  $f$  sont stables par  $g$  et les sous-espaces propres de  $g$  sont stables par  $f$ .

**Exemple 2**

En reprenant l'exemple précédent, on a en écrivant  $P = aX^2 + bX + c$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  que

$$P \in E_2(f) \Leftrightarrow 2P - f(P) = 0 \Leftrightarrow c - aX^2 = 0 \Leftrightarrow a = c = 0,$$

donc on a  $E_2(f) = \text{Vect}(X)$ .

### Définition (Spectre)

Le spectre de  $f$ , noté  $\text{Sp}(f)$ , est l'ensemble des valeurs propres de  $f$ .

### Théorème 1

Une somme finie de sous-espaces propres de  $f$  associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.

### Remarques 3

- On en déduit que toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- Si  $E$  est de dimension finie, on en déduit que  $f$  admet au plus  $\dim(E)$  valeurs propres distinctes.

### Exemple 3

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on considère la fonction  $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$ . Si on note  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  défini par  $\varphi : f \mapsto f'$ , on remarque que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f_\lambda) = \lambda f_\lambda,$$

donc la fonction  $f_\lambda$  est un vecteur propre de  $\varphi$  pour la valeur propre  $\lambda$ . On en déduit que si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  sont des nombres distincts deux à deux, alors la famille  $(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_n})$  est libre.

**Exercice 1**

Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites réelles convergeant vers 0. On considère l'application  $\Delta$  définie sur  $E$  qui à chaque élément  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  associe la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

- 1) Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $E$ .
- 2) Déterminer les éléments propres de  $\Delta$ .

**Proposition 1**

Si  $P \in \mathbb{K}[X]$  est un polynôme annulateur de  $f$ , alors toutes les valeurs propres de  $f$  sont des racines de  $P$ .

**Exemple 4**

Si  $f$  est un endomorphisme nilpotent, alors il existe un entier  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $P = X^k$  est un polynôme annulateur de  $f$ , donc on a l'inclusion  $\text{Sp}(f) \subset \{0_{\mathbb{K}}\}$ .

**Exercice 2**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ . Montrer que si  $P \in \mathbb{K}[X]$  est un polynôme et si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $f$ , alors  $P(\lambda)$  est une valeur propre de  $P(f)$ .

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel  $E$  est de dimension finie.

### Définition (Polynôme caractéristique)

Le polynôme caractéristique de  $f$  est l'application  $\chi_f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_f(\lambda) = \det(\lambda \text{Id}_E - f).$$

**Proposition 2**

Le polynôme caractéristique de  $f$  est une fonction polynomiale de degré  $\dim(E)$  telle que

- (i) le coefficient dominant est égal à 1,
- (ii) le coefficient de degré  $\dim(E) - 1$  est égal à  $-\operatorname{tr}(f)$ ,
- (iii) le coefficient constant est égal à  $(-1)^{\dim(E)} \det(f)$ .

**Remarque 4**

Autrement dit, le polynôme caractéristique de  $f$  est de la forme

$$\chi_f : \lambda \mapsto \lambda^{\dim(E)} - \operatorname{tr}(f)\lambda^{\dim(E)-1} + \dots + (-1)^{\dim(E)} \det(f).$$

## Théorème 2

Les valeurs propres de  $f$  sont les racines dans  $\mathbb{K}$  du polynôme caractéristique  $\chi_f$ .

**Définition (Ordre de multiplicité d'une valeur propre)**

L'ordre de multiplicité d'une valeur propre  $\lambda$  de l'endomorphisme  $f$ , notée  $m_\lambda(f)$ , est l'ordre de multiplicité de la racine  $\lambda$  dans le polynôme caractéristique  $\chi_f$ .

**Exemple 5**

On considère l'endomorphisme  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z).$$

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme  $f$  est

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & -1 \\ \lambda - 3 & \lambda - 1 & -1 \\ \lambda - 3 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ & \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (\lambda - 3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3). \end{aligned}$$

**Exemple 5**

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme  $f$  est

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3).$$

D'après le théorème précédent, on en déduit que les valeurs propres de l'endomorphisme  $f$  sont 0 et 3 avec pour multiplicité  $m_0(f) = 2$  et  $m_3(f) = 1$ . De plus, on obtient par le calcul que les sous-espaces propres associés sont

$$E_0(f) = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1)) \quad \text{et} \quad E_3(f) = \text{Vect}((1, 1, 1)).$$

**Théorème 3**

Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $f$ , alors on a l'inégalité

$$1 \leq \dim(E_\lambda(f)) \leq m_\lambda(f).$$

**Exemple 6**

On considère l'endomorphisme  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x, y + z, z).$$

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme  $f$  est  $\chi_f(\lambda) = (\lambda - 1)^3$ . On en déduit que  $f$  admet une unique valeur propre qui est 1 et que sa multiplicité est  $m_1(f) = 3$ . Le sous-espace propre associé est

$$E_1(f) = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$$

qui est de dimension 2.

## Théorème de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique  $\chi_f$  est un polynôme annulateur de  $f$ .

### Exemple 7

En reprenant l'exemple précédent, on déduit du théorème ci-dessus que  $(f - \text{Id}_E)^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

**Exercice 3**

Soit  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$  un couple d'endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ .

- 1) Montrer que  $\text{Sp}(f \circ g) \cap \mathbb{K}^* = \text{Sp}(g \circ f) \cap \mathbb{K}^*$ .
- 2) Montrer que si  $E$  est de dimension finie, alors  $\text{Sp}(f \circ g) = \text{Sp}(g \circ f)$ .

Dans cette partie, on considère un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

## Définition

Toutes les définitions précédentes s'adaptent aux matrices carrées.

- (i) On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $M$  s'il existe un vecteur  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  non nul tel que  $MV = \lambda V$ .
- (ii) On dit que  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est un vecteur propre de  $M$  s'il est non nul et s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $MV = \lambda V$ .
- (iii) Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de la matrice  $M$ , le sous-espace propre de  $M$  associé à  $\lambda$  est le sous-espace vectoriel  $E_\lambda(M) = \text{Ker}(\lambda I_n - M)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .
- (iv) Le spectre de  $M$ , noté  $\text{Sp}(M)$ , est l'ensemble des valeurs propres de  $M$ .
- (v) Le polynôme caractéristique de la matrice  $M$  est l'application  $\chi_M : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M).$$

**Remarque 5**

L'équation  $MV = \lambda V$  d'inconnue  $(\lambda, V) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}$  est appelée équation aux éléments propres.

**Théorème 4**

Une somme finie de sous-espaces propres de  $M$  associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.

**Remarque 6**

On en déduit qu'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  admet au plus  $n$  valeurs propres distinctes.

**Proposition 3**

Si  $P \in \mathbb{K}[X]$  est un polynôme annulateur de  $M$ , alors toutes les valeurs propres de  $M$  sont des racines de  $P$ .

**Exemple 8**

Si  $M$  est une matrice nilpotente, alors il existe un entier  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $P = X^k$  est un polynôme annulateur de  $M$ , donc on a l'inclusion  $\text{Sp}(M) \subset \{0_{\mathbb{K}}\}$ .

**Exercice 4**

On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Calculer  $J^2$ , puis en déduire les éléments propres de  $J$ .

**Proposition 4**

Le polynôme caractéristique de  $M$  est une fonction polynomiale de degré  $n$  telle que

- (i) le coefficient dominant est égal à 1,
- (ii) le coefficient de degré  $n - 1$  est égal à  $-\text{tr}(M)$ ,
- (iii) le coefficient constant est égal à  $(-1)^n \det(M)$ .

**Remarque 7**

Autrement dit, le polynôme caractéristique de  $f$  est de la forme

$$\chi_M : \lambda \mapsto \lambda^n - \text{tr}(M)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(M).$$

**Théorème 5**

Les valeurs propres de la matrice  $M$  sont les racines racines du polynôme caractéristique  $\chi_M$ .

**Remarque 8**

Les valeurs propres d'une matrices triangulaires sont ses coefficients diagonaux.

## Notation

Comme une matrice de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est aussi une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , il est préférable de préciser le corps dans lequel on considère les valeurs propres de la matrice  $A$ . En général, on note  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$  l'ensemble des valeurs propres réelles de  $A$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  l'ensemble des valeurs propres complexes de  $A$ .

## Remarques 9

- Par le théorème précédent, si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'ensemble  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$  est l'ensemble des racines réelles du polynôme  $\chi_A$ , tandis que l'ensemble  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  est l'ensemble des racines complexes du polynôme  $\chi_A$ .
- Comme  $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ , on peut toujours choisir d'étudier les éléments propres d'une matrice sur le corps  $\mathbb{C}$ .

**Exemple 9**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  est

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ \lambda & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ & \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

**Exemple 9**

En développant par rapport à la première colonne ce dernier déterminant, on obtient que

$$\chi_A(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda((\lambda + 1)(\lambda - 1) + 2) = \lambda(\lambda^2 + 1).$$

D'après le théorème précédent, on en déduit que  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$   
et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0, i, -i\}$ .

**Définition (Ordre de multiplicité d'une valeur propre)**

L'ordre de multiplicité d'une valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $M$ , noté  $m_\lambda(M)$ , est l'ordre de multiplicité de la racine  $\lambda$  dans le polynôme caractéristique  $\chi_M$ .

**Théorème 6**

Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $M$ , alors on a l'inégalité

$$1 \leq \dim(E_\lambda(M)) \leq m_\lambda(M).$$

**Remarque 10**

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique : on en déduit qu'elles ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

En effet, si deux matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont semblables, i.e. s'il existe une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = PBP^{-1}$ , alors on a la relation

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda I_n - A = P(\lambda I_n - B)P^{-1}.$$

On en déduit que  $\lambda I_n - A$  et  $\lambda I_n - B$  sont semblables pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , donc elles ont le même déterminant, i.e. le même polynôme caractéristique.

## Théorème de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique  $\chi_M$  est un polynôme annulateur de  $M$ .

**Exercice 5**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- 1) Déterminer un polynôme annulateur non nul de  $A$ .
- 2) En déduire une expression de  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Bilan

Une fois que l'on a fixé une base  $\mathcal{B}$  de l'espace vectoriel  $E$ , nous pouvons donc passer des objets définis dans le cadre des espaces vectoriels à des objets matriciels. Le tableau ci-dessous résume la correspondance entre ces deux aspects avec les notions de seconde année.

Représentation vectorielle	Lien	Représentation matricielle
$v \in E$	$\text{Mat}_{\mathcal{B}}$	$V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$f \in \mathcal{L}(E)$	$\text{Mat}_{\mathcal{B}}$	$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$v \in E_{\lambda}(f)$	$\text{Mat}_{\mathcal{B}}$	$V \in E_{\lambda}(M)$
$\text{Sp}(f)$	=	$\text{Sp}(M)$
$\chi_f$	=	$\chi_M$
$m_{\lambda}(f)$	=	$m_{\lambda}(M)$
$\text{tr}(f)$	=	$\text{tr}(M)$
$\det(f)$	=	$\det(M)$

Dans cette partie, on considère un élément  $f \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ .

### Définition (Endomorphisme diagonalisable)

L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de l'espace vectoriel  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est diagonale.

### Remarque 11

On peut reformuler la définition précédente. L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable si et seulement si il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  constituée de vecteurs propres pour  $f$ .

**Exemples 10**

- a) Soit  $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  l'endomorphisme défini par  $f: P \mapsto P + XP'$ .  
Dans la base canonique  $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_2[X]$ , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

donc l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable.

- b) Toute homothétie vectorielle de  $E$  est diagonalisable, car sa matrice dans toute base de  $E$  est diagonale.

**Exemples 10**

- c) Tout projecteur vectoriel  $p \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable, car si  $\mathcal{B}$  est une base adaptée à la décomposition en somme directe  $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} \text{I}_r & \text{O} \\ \text{O} & \text{O} \end{pmatrix} \quad \text{avec } r = \text{rang}(p).$$

- d) Toute symétrie vectorielle  $s \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable, car si  $\mathcal{B}$  est une base adaptée à la décomposition en somme directe  $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \text{I}_k & \text{O} \\ \text{O} & -\text{I}_\ell \end{pmatrix} \quad \text{avec } (k, \ell) \in \mathbb{N}^2.$$

**Théorème 7**

L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_{\lambda}(f)$ .

On rappelle qu'un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  s'il s'écrit comme un produit de facteurs de degré 1 de  $\mathbb{K}[X]$ . Par le théorème de d'Alembert-Gauss, tous les polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  sont scindés sur  $\mathbb{C}$ . Par contre, ce n'est pas le cas de tous les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  : par exemple le polynôme  $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème (Caractérisations géométriques des endomorphismes...)**

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable.

(ii) On a la relation

$$\dim(E) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)).$$

(iii) Le polynôme caractéristique  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(f), \quad \dim(E_\lambda(f)) = m_\lambda(f).$$

**Exercice 6**

On définit l'endomorphisme  $\varphi : \mathbb{C}_3[X] \rightarrow \mathbb{C}_3[X]$  par

$$\varphi : P \mapsto (X^2 - 1)P'' - (X - 1)P'.$$

- 1) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme  $\varphi$ .
- 2) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable?

**Exercice 7**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'endomorphisme  $\Delta : P \mapsto P'$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  est-il diagonalisable?

**Corollaire 1**

Si l'endomorphisme  $f$  admet  $\dim(E)$  valeurs propres distinctes, alors  $f$  est diagonalisable et les sous-espaces propres de  $f$  sont des droites vectorielles.

**ATTENTION**

La réciproque du corollaire est fausse! Par exemple, une homothétie est diagonalisable, mais elle admet une unique valeur propre.

**Exercice 8**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On définit l'endomorphisme  $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$  par

$$\varphi : P \mapsto P\left(\frac{X+1}{2}\right).$$

- 1) Déterminer les valeurs propres de  $\varphi$ .
- 2) Montrer que  $\varphi$  est diagonalisable.
- 3) Calculer  $\varphi((X-1)^k)$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .
- 4) En déduire les sous-espaces propres de  $\varphi$ .

**Théorème (Caractérisations algébriques des endomorphismes...)**

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable.
- (ii) L'endomorphisme  $f$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur  $\mathbb{K}$ .
- (iii) Le polynôme  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)$  est un polynôme annulateur de  $f$ .

**Corollaire 2**

Si  $f$  est un endomorphisme diagonalisable et si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$ , alors la restriction de  $f$  à  $F$  est diagonalisable.

**Exercice 9**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On définit l'endomorphisme  $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$  par

$$\varphi : P \mapsto P(1 - X) + 2P(X).$$

Calculer  $\varphi^2$ , puis en déduire que  $\varphi$  est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Dans cette partie, on considère un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### Définition (Matrice diagonalisable)

La matrice  $M$  est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

### Remarque 12

Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  et si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , alors il résulte de la définition précédente et de la formule du changement de base que l'on a l'équivalence

$$f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ est diagonalisable.}$$

**Théorème 8**

La matrice  $M$  est diagonalisable si et seulement si  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(M)} E_{\lambda}(M)$ .

**Théorème (Caractérisations géométriques des matrices diagonalisables)**

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) La matrice  $M$  est diagonalisable.
- (ii) On a la relation

$$\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim(E_{\lambda}(M)).$$

- (iii) Le polynôme caractéristique  $\chi_M$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(M), \quad \dim(E_{\lambda}(M)) = m_{\lambda}(M).$$

**Corollaire 3**

Si la matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $M$  est diagonalisable et les sous-espaces propres de  $M$  sont des droites vectorielles.

**ATTENTION**

La réciproque du corollaire est fausse! Par exemple, une matrice de la forme  $M = \lambda I_n$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}$  est diagonalisable, mais elle admet une unique valeur propre.

**Exercice 10**

Soit  $m \in \mathbb{R}$ . On considère la matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  suivante

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 - m & m - 2 & m \end{pmatrix}.$$

- 1) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice  $A_m$ .
- 2) Pour quelles valeurs de  $m \in \mathbb{R}$  est-elle diagonalisable?

**Théorème (Caractérisations algébriques des matrices diagonalisables)**

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) La matrice  $M$  est diagonalisable.
- (ii) La matrice  $M$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur  $\mathbb{K}$ .
- (iii) Le polynôme  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (X - \lambda)$  est un polynôme annulateur de  $M$ .

**Exercice 11**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère la matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $m_{i,j} = 1$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Calculer  $M^2$ , puis en déduire que  $M$  est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  que l'on souhaite diagonaliser si possible sur  $\mathbb{K}$ .

- 1) On calcule le polynôme caractéristique de  $A$ .
  - a) Si  $\chi_A$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{K}$ . On conclut que l'on ne peut pas la diagonaliser sur  $\mathbb{K}$ .
  - b) Sinon, on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$  les valeurs propres de  $A$ .
- 2) On détermine une base  $\mathcal{B}_k$  de chaque sous-espace propre  $E_{\lambda_k}(A)$  de  $A$ .
  - a) Si pour une valeur propre  $\lambda_k$  de  $A$ , on a  $\dim(E_{\lambda_k}(A)) < m_{\lambda_k}(A)$ , alors la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{K}$ . On conclut que l'on ne peut pas la diagonaliser sur  $\mathbb{K}$ .
  - b) Sinon, on passe au point suivant.

- 3) En considérant la base  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$  de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et la base canonique  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , on a par la formule du changement de base que

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$$

où  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est la matrice diagonale

$$D = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_{\lambda_1}(A)}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_{\lambda_2}(A)}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_{\lambda_p}(A)}).$$

**Exemple 11**

On souhaite diagonaliser sur  $\mathbb{R}$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Le polynôme  $\chi_A$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ , car son discriminant est strictement négatif. On en déduit que  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 12**

On reprend la matrice  $A$  de l'exemple précédent que l'on souhaite diagonaliser sur  $\mathbb{C}$ . Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

qui est scindé sur  $\mathbb{C}$ . On en déduit que  $\text{Sp}(A) = \{i, -i\}$ . On détermine une base de chacun des sous-espaces propres.

$$E_i(A) = \text{Ker}(iI_2 - A) = \text{Ker}\left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right),$$

$$E_{-i}(A) = \text{Ker}(-iI_2 - A) = \text{Ker}\left(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right).$$

**Exemple 12**

Comme  $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})) = \dim(E_i(A)) + \dim(E_{-i}(A))$ , on en déduit que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . Finalement, on a

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

### Remarque 13

On constate dans l'exemple ci-dessus que les vecteurs propres sont conjugués. De manière générale, si  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  est une valeur propre d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors le nombre  $\bar{\lambda}$  est une valeur propre de  $A$  et les sous-espaces propres associés sont conjugués. En effet, on a

$$V \in E_\lambda(A) \Leftrightarrow AV = \lambda V \quad \underset{\substack{\text{Conjugaison} \\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}{\iff} \quad A\bar{V} = \bar{\lambda} \bar{V} \Leftrightarrow \bar{V} \in E_{\bar{\lambda}}(A).$$

En particulier, si on a  $E_\lambda(A) = \text{Vect}(V_1, \dots, V_p)$ , alors  $E_{\bar{\lambda}}(A) = \text{Vect}(\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_p)$ .

**Exemple 13**

On souhaite diagonaliser sur  $\mathbb{R}$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2.$$

qui est un polynôme scindé sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que  $\text{Sp}(A) = \{1\}$ .

**Exemple 13**

On détermine le sous-espace propre associé.

$$E_1(A) = \text{Ker}(I_2 - A) = \text{Ker}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

On remarque que  $\dim(E_1(A)) = 1 < 2 = m_1(A)$ , donc la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 14**

On souhaite diagonaliser sur  $\mathbb{R}$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

En utilisant l'opération élémentaire  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ , on obtient que

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 & -1 \\ \lambda - 4 & \lambda - 2 & -1 \\ \lambda - 4 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

**Exemple 14**

De plus, en utilisant  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ , on obtient que le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2.$$

qui est un polynôme scindé sur  $\mathbb{R}$ . Les valeurs propres de  $A$  sont 1 et 4.

**Exemple 14**

On détermine une base de chacun des sous-espaces propres.

$$E_1(A) = \text{Ker}(I_3 - A) = \text{Ker} \left( \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

$$E_4(A) = \text{Ker}(4I_3 - A) = \text{Ker} \left( \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Comme  $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = \dim(E_1(A)) + \dim(E_4(A))$ , on en déduit que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Finalement, on a

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 12

On considère les matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune des matrices ci-dessus.

- 1) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice.
- 2) La matrice est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ ? Si oui, la diagonaliser.

**Exercice 13**

On considère les matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & -1 & -1+2i \\ 2 & 3+i & 1-3i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune des matrices ci-dessus.

- 1) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice.
- 2) La matrice est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ ? Si oui, la diagonaliser.

Lorsque l'on a réussi à diagonaliser une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , il est facile de calculer ses puissances. En effet, si on peut écrire  $A = PDP^{-1}$  avec une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et une matrice inversible  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a la relation

$$A^k = (PDP^{-1})^k = \underbrace{(PDP^{-1})}_{I_n} \underbrace{(PDP^{-1})}_{I_n} \cdots \underbrace{(PDP^{-1})}_{I_n} \underbrace{(PDP^{-1})}_{I_n} = PD^kP^{-1},$$

donc on peut calculer  $A^k$  car l'on connaît  $P$ ,  $D^k$  et  $P^{-1}$ .

**Exemple 15**

On souhaite calculer les puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

D'après l'exemple précédent, on a

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}.$$

**Exemple 15**

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^k + 2 & 4^k - 1 & 4^k - 1 \\ 4^k - 1 & 4^k + 2 & 4^k - 1 \\ 4^k - 1 & 4^k - 1 & 4^k + 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Exercice 14

On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Diagonaliser la matrice  $B$ , puis en déduire une expression de  $B^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère une matrice diagonalisable  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . La méthode ci-dessous permet de déterminer les fonctions vectorielles  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  vérifiant le système différentiel  $X' = AX$ .

- 1) On diagonalise la matrice  $A$  : on détermine une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  et une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .
- 2) En introduisant la fonction vectorielle  $Y = P^{-1}X$ , on se ramène à résoudre un système différentiel plus simple avec la suite d'équivalence ci-dessous.

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Leftrightarrow Y' = DY.$$

- 3) On détermine les solutions  $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  du système différentiel  $Y' = DY$  en résolvant des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1.
- 4) En utilisant la relation  $X = PY$ , on en déduit les solutions du système différentiel  $X' = AX$ .

**Exemple 16**

Résolvons le système différentiel sur  $\mathbb{R}$  défini par

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_X. \quad (S)$$

En réduisant la matrice  $A$ , on trouve

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En posant  $Y = P^{-1}X$ , on obtient que  $Y$  est solution du système différentiel

$$Y' = DY \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u' &= 2u \\ v' &= 0 \end{cases} \quad \text{si} \quad Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

**Exemple 16**

En résolvant ces deux équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1, on en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

En substituant dans  $X = PY$ , on conclut que les solutions du système différentiel (S) sont

$$X: t \mapsto \lambda e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 15**

Résoudre les systèmes différentiels suivants.

$$(i) \begin{cases} x' &= 4x - 2y \\ y' &= x + y, \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= x + z, \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} x' &= -x + 3y + e^t \\ y' &= -2x + 4y. \end{cases}$$

**Exercice 16**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  que l'on suppose diagonalisable. Montrer que toutes les solutions  $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  du système différentiel  $X' = AX$  sont bornées si et seulement si  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-$ .

Dans cette partie, on considère un élément  $f \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ .

### Définition (Endomorphisme trigonalisable)

L'endomorphisme  $f$  est trigonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de l'espace vectoriel  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est triangulaire supérieure.

### Remarque 14

On peut démontrer que l'on obtient une définition équivalente de trigonalisable en remplaçant la mention « triangulaire » par « triangulaire supérieure ».

**Théorème (Caractérisation des endomorphismes trigonalisables)**

L'endomorphisme  $f$  est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

**Corollaire 4**

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , tout endomorphisme de  $E$  est trigonalisable.

### Théorème 9

On suppose que  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  sont les valeurs propres de  $f$  comptées avec multiplicité, alors

$$\operatorname{tr}(f) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \quad \text{et} \quad \det(f) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

### Remarque 15

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , les formules précédentes sont toujours vérifiées, car tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ .

**Exemple 17**

On considère l'endomorphisme  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z).$$

Le polynôme caractéristique de  $f$  est  $\chi_f(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$ . Les valeurs propres de l'endomorphisme  $f$  sont 1 et 4 avec les multiplicités  $m_1(f) = 2$  et  $m_4(f) = 1$ . Le polynôme  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  et on a

$$\operatorname{tr}(f) = 1 + 1 + 4 = 6 \quad \text{et} \quad \det(f) = 1 \times 1 \times 4 = 4.$$

Dans cette partie, on considère un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### Définition (Matrice trigonalisable)

La matrice  $M$  est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

### Remarque 16

Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  et si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , alors il résulte de la définition précédente et de la formule du changement de base que l'on a l'équivalence

$$f \text{ est trigonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ est trigonalisable.}$$

**Théorème (Caractérisation des matrices trigonalisables)**

La matrice  $M$  est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique  $\chi_M$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

**Corollaire 5**

Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.

**Théorème 10**

On suppose que  $\chi_M$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  sont les valeurs propres de  $M$  comptées avec multiplicité, alors

$$\operatorname{tr}(M) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \quad \text{et} \quad \det(M) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

**Remarque 17**

Si on considère les valeurs propres complexes de  $M$ , les formules précédentes sont vérifiées.

**Exercice 17**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $\text{Sp}(A^k) = \{\lambda^k \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ .

Le programme ne demande pas de savoir trigonaliser de manière effective une matrice. Il faut se laisser guider par les énoncés des exercices.

### Remarque 18

Lorsque l'on a réussi à trigonaliser une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , il est souvent possible de calculer ses puissances. En effet, si on peut écrire  $A = PTP^{-1}$  avec une matrice triangulaire  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et une matrice inversible  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors on a la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PT^kP^{-1}.$$

Pour conclure, il faut réussir à calculer  $T^k$  pour en déduire  $A^k$ .

**Exemple 18**

On souhaite calculer les puissance de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est  $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$  et on a

$$E_2(A) = \text{Ker}(2I_2 - A) = \text{Ker}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

On en déduit que la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

**Exemple 18**

Pour trigonaliser la matrice  $A$ , il suffit de compléter le vecteur propre ci-dessus en choisissant un second vecteur non colinéaire à ce dernier, puis de poser

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$$

$$\text{et } T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} A^k &= PT^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & -k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k-1}(2-k) & -k2^{k-1} \\ k2^{k-1} & 2^{k-1}(2+k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exercice 18**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- 1) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
- 2) Trigonaliser la matrice  $A$ .
- 3) En déduire une expression de  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .