TD 6 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans tous les exercices, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 1 : Soient $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe la fonction f'. Déterminer les éléments propres de D.

Exercice 2 : Soient $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de E défini par

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 3 : On considère l'application $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = M + \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{I}_n.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 4 : On note $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs complexes. On considère l'endomorphisme $T : E \to E$ définie pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v = T(u)$ avec

$$v_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

Déterminer les éléments propres de T.

Exercice 5 : Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ vérifiant $AB - BA = A$.

1. Calculer $A^kB - BA^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En considérant l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto MB - BM$, en déduire que la matrice A est nilpotente.

Exercice 6 : On considère une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\chi_M = \chi_{M^\top}$.
2. On suppose que $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Étudier la parité du polynôme χ_M.

Exercice 7 : On considère la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 20 & 12 \\ -4 & 12 & 6 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de la matrice A.
2. Montrer que A est inversible et donner son inverse.
3. Déterminer une expression A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 : Montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est X^n.

Exercice 9 : Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est triangulaire supérieure si et seulement si A^k est triangulaire supérieure pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$.

Exercice 10 : Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX - XB = C$.

(ii) Si $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.

(iii) La matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

(iv) On a $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$.

Partie II Endomorphismes et matrices diagonalisables

Exercice 11 : Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice définie par

$$B_m = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ m^2 - 7m & m-7 & m \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice B_m.
2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 12 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X+1)P'.$$

1. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme φ.
2. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 13 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\Phi_A \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$ par

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Phi_A(M) = AM - MA.$$

1. Soient $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de $A^\top$. Montrer que $XY^\top$ est un vecteur propre de Φ_A.
2. Montrer que si A est diagonalisable, alors $A^\top$ est diagonalisable.
3. Montrer que si A est diagonalisable, alors l'endomorphisme Φ_A est diagonalisable. Dans ce cas, préciser les valeurs propres de Φ_A.

Exercice 14 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Déterminer une matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

Exercice 15 : Les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ ci-dessous sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 : On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leur premier terme $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}$ et les relations

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} & = & u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} & = & u_n + v_n - w_n. \end{array} \right.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ pour que les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 17 : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable avec $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de M pour que la suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 18 : Soit v un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = v$.

Exercice 19 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Exercice 20 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ un couple d'endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(v)$.
   (a) Montrer que le sous-espace vectoriel $E_\lambda(v)$ est stable par u.
   (b) Montrer que la restriction de u à $E_\lambda(v)$ est diagonalisable.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E telle que les deux matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ soient diagonales.

Exercice 21 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n le polynôme caractéristique de

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer P_1 et P_2.
2. Montrer que $P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $a \in]0,\pi[$, on a
$$P_n(2\cos(a)) = \frac{\sin((n+1)a)}{\sin(a)}.$$
4. En déduire les racines du polynôme P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que A_n est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Exercice 22 : Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $a \neq b$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & (a) \\ & \ddots & \\ (b) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit l'application $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - M + xU) \quad \text{où} \quad U = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application f_λ est affine.
2. En déduire une expression de $f_\lambda(x)$ pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R}^2$.
3. En déduire le polynôme caractéristique de la matrice M.
4. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
5. Montrer que si $|a| \neq |b|$, alors les points du plan dont les affixes sont les valeurs propres de M appartiennent à un cercle.
6. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice M.

Partie III Endomorphismes et matrices trigonalisables

Exercice 23 : On considère les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & -8 \\ -9 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les éléments propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que les matrices A et T sont semblables.

Exercice 24 : On considère les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que les matrices A et T sont semblables.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 25 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. (a) Déterminer le rang de la matrice A.
   (b) En déduire que $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et que $m_0(A) \geqslant n-2$.
2. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\mathrm{Sp}(A) = \{0,\lambda,\mu\}$.
   (a) Calculer les nombres $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A^2)$.
   (b) En déduire les valeurs propres de A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 26 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 2. Exprimer le polynôme caractéristique de la matrice A avec les nombres $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A^2)$.

Exercice 27 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A), \quad \mathrm{tr}\left((x\mathrm{I}_n - A)^{-1}\right) = \frac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)}.$$

Exercice 28 : Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{C}$ vérifiant $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.
2. En déduire que u et v sont simultanément trigonalisables.

Exercice 29 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $\left(\mathrm{tr}\left(A^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si $|\lambda| < 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

Partie IV Réduction et polynômes annulateurs

Exercice 30 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$ si et seulement si l'entier n est pair.

Exercice 31 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^5 = M^2$ et $\mathrm{tr}(M) = n$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) = \{1\}$.
2. En déduire que $M = \mathrm{I}_n$.

Exercice 32 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 + A^2 + A = \mathrm{O}_n$. Montrer que A est de rang pair et que $\mathrm{tr}(A)$ est un entier négatif.

Exercice 33 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant la relation $A^3 = A + \mathrm{I}_n$, alors $\det(A) > 0$.

Exercice 34 : Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si la matrice A^2 est diagonalisable.

Exercice 35 : Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que

$$M = \begin{pmatrix} A & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & B \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ et } B \text{ sont diagonalisables.}$$

Exercice 36 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ est diagonalisable.}$$

Exercice 37 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ \mathrm{O}_n & A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad A = 0.$$