Mathématiques

PSI

Lycée Couffignal

Chapitre 6

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Plan du chapitre

Introduction

Considérons un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Pour chaque base $\mathscr{B}$ de E, nous savons associer à f sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ dans la base $\mathscr{B}$. Pour faciliter la résolution de nombreux problèmes en algèbre linéaire (calcul des puissances d'une matrice par exemple), nous souhaiterions pouvoir choisir la base $\mathscr{B}$ de E de telle sorte que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit la plus simple possible.

En pratique, nous souhaiterions déterminer une base $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale, c'est à dire

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

D'un point de vue matriciel, le problème se reformule via la formule du changement de base. Nous étudierons à quelles conditions une matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est-elle semblable à une matrice diagonale, c'est à dire

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Plus généralement, il est naturel de se demander à quelles conditions deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, mais ce problème dépasse le cadre du programme.

Par définition, la relation $(*)$ se traduit par $f(v_i) = \lambda_i v_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Cette remarque nous amènera à étudier les couples $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times E$ avec $v \neq 0_E$ vérifiant la relation $f(v) = \lambda v$. Nous déterminerons ensuite des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une base $\mathscr{B}$ vérifiant $(*)$.

Historiquement, l'ensemble des problèmes exposés ci-dessus ont étés résolus par les mathématiciens Weierstrass, Jordan et Frobenius entre 1868 et 1880.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Dans cette partie, on considère un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

I.A - Généralités

Définition (Élément propre d'un endomorphisme) :

(i) On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur $v \in E$ non nul tel que $f(v) = \lambda v$.

(ii) On dit qu'un élément $v \in E$ est un vecteur propre de l'endomorphisme f s'il est non nul et s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$.

Remarques 1 :

a) Un vecteur $v \in E$ non nul est un vecteur propre de f si et seulement si la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(v)$ est stable par f.

b) L'équation $f(v) = \lambda v$ d'inconnue $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times E \setminus \{0_E\}$ est appelée équation aux éléments propres.

Exemple 1 : Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'endomorphisme défini par $f : P \mapsto P + XP'$. On a $f(X) = 2X$, donc X est un vecteur propre de f pour la valeur propre 2.

Définition (Sous-espace propre) : Le sous-espace propre de f associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de f est le sous-espace vectoriel $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - f)$.

Remarques 2 :

a) Le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est l'ensemble constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ.

b) Si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors les sous-espaces propres de f sont stables par g et les sous-espaces propres de g sont stables par f.

Exemple 2 : En reprenant l'exemple précédent, on a en écrivant $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ que

$$P \in E_2(f) \quad \Leftrightarrow \quad 2P - f(P) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c - aX^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = c = 0,$$

donc on a $E_2(f) = \mathrm{Vect}(X)$.

Définition (Spectre) : Le spectre de f, noté $\mathrm{Sp}(f)$, est l'ensemble des valeurs propres de f.

Théorème 1 : Une somme finie de sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.

Remarques 3 :

a) On en déduit que toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libres.

b) Si E est de dimension finie, on en déduit que f admet au plus $\dim(E)$ valeurs propres distinctes.

Exemple 3 : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. Si on note φ l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par $\varphi : f \mapsto f'$, on remarque que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f_\lambda) = \lambda f_\lambda,$$

donc la fonction f_λ est un vecteur propre de φ pour la valeur propre λ. On en déduit que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont des nombres distincts deux à deux, alors la famille $(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n})$ est libre.

Exercice 1 : Soit E l'espace vectoriel des suites réelles convergeant vers 0. On considère l'application Δ définie sur E qui à chaque élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de E.

2) Déterminer les éléments propres de Δ.

Proposition 1 : Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de f, alors toutes les valeurs propres de f sont des racines de P.

Exemple 4 : Si f est un endomorphisme nilpotent, alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P = X^k$ est un polynôme annulateur de f, donc on a l'inclusion $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0_\mathbb{K}\}$.

Exercice 2 : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Montrer que si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme et si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$.

I.B - Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie.

Définition (Polynôme caractéristique) : Le polynôme caractéristique de f est l'application $\chi_f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_f(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - f).$$

Proposition 2 : Le polynôme caractéristique de f est une fonction polynomiale de degré $\dim(E)$ telle que

(i) le coefficient dominant est égal à 1,

(ii) le coefficient de degré $\dim(E) - 1$ est égal à $-\mathrm{tr}(f)$,

(iii) le coefficient constant est égal à $(-1)^{\dim(E)} \det(f)$.

Remarque 4 : Autrement dit, le polynôme caractéristique de f est de la forme

$$\chi_f : \lambda \mapsto \lambda^{\dim(E)} - \mathrm{tr}(f)\lambda^{\dim(E)-1} + \cdots + (-1)^{\dim(E)} \det(f).$$

Théorème 2 : Les valeurs propres de f sont les racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme caractéristique χ_f.

Définition (Ordre de multiplicité d'une valeur propre) : L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de l'endomorphisme f, notée $m_\lambda(f)$, est l'ordre de multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_f.

Exemple 5 : On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z).$$

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f est

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ \lambda-3 & \lambda-1 & -1 \\ \lambda-3 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{=} (\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-3).$$

D'après lé théorème précédent, on en déduit que les valeurs propres de l'endomorphisme f sont 0 et 3 avec pour multiplicité $m_0(f) = 2$ et $m_3(f) = 1$. De plus, on obtient par le calcul que les sous-espaces propres associés sont

$$E_0(f) = \mathrm{Vect}\big((1, 0, -1), (0, 1, -1)\big) \quad \text{et} \quad E_3(f) = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big).$$

Théorème 3 : Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f, alors on a l'inégalité

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(f)) \leqslant m_\lambda(f).$$

Exemple 6 : On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x, y + z, z).$$

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f est $\chi_f(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. On en déduit que f admet une unique valeur propre qui est 1 et que sa multiplicité est $m_1(f) = 3$. Le sous-espace propre associé est

$$E_1(f) = \mathrm{Vect}\big((1, 0, 0), (0, 0, 1)\big)$$

qui est de dimension 2.

Théorème de Cayley-Hamilton : Le polynôme caractéristique χ_f est un polynôme annulateur de f.

Exemple 7 : En reprenant l'exemple précédent, on déduit du théorème ci-dessus que $(f - \mathrm{Id}_E)^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 3 : Soit $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ un couple d'endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

1) Montrer que $\mathrm{Sp}(f \circ g) \cap \mathbb{K}^* = \mathrm{Sp}(g \circ f) \cap \mathbb{K}^*$.
2) Montrer que si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Sp}(f \circ g) = \mathrm{Sp}(g \circ f)$.

I.C - Extension des notions aux matrices

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition : Toutes les définitions précédentes s'adaptent aux matrices carrées.

(i) On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M s'il existe un vecteur $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $MV = \lambda V$.

(ii) On dit que $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre de M s'il est non nul et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $MV = \lambda V$.

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de la matrice M, le sous-espace propre de M associé à λ est le sous-espace vectoriel $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{I}_n - M)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

(iv) Le spectre de M, noté $\mathrm{Sp}(M)$, est l'ensemble des valeurs propres de M.

(v) Le polynôme caractéristique de la matrice M est l'application $\chi_M : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_M(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - M).$$

Remarque 5 : L'équation $MV = \lambda V$ d'inconnue $(\lambda, V) \in \mathbb{K} \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}$ est appelée équation aux éléments propres.

Théorème 4 : Une somme finie de sous-espaces propres de M associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.

Remarque 6 : On en déduit qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

Proposition 3 : Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de M, alors toutes les valeurs propres de M sont des racines de P.

Exemple 8 : Si M est une matrice nilpotente, alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P = X^k$ est un polynôme annulateur de M, donc on a l'inclusion $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0_{\mathbb{K}}\}$.

Exercice 4 : On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Calculer J^2, puis en déduire les éléments propres de J.

Proposition 4 : Le polynôme caractéristique de M est une fonction polynomiale de degré n telle que

(i) le coefficient dominant est égal à 1,

(ii) le coefficient de degré $n-1$ est égal à $-\operatorname{tr}(M)$,

(iii) le coefficient constant est égal à $(-1)^n \det(M)$.

Remarque 7 : Autrement dit, le polynôme caractéristique de f est de la forme

$$\chi_M : \lambda \mapsto \lambda^n - \operatorname{tr}(M)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M).$$

Théorème 5 : Les valeurs propres de la matrice M sont les racines racines du polynôme caractéristique χ_M.

Remarque 8 : Les valeurs propres d'une matrices triangulaires sont ses coefficients diagonaux.

Notation : Comme une matrice de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est aussi une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il est préférable de préciser le corps dans lequel on considère les valeurs propres de la matrice A. En général, on note $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A.

Remarques 9 :

a) Par le théorème précédent, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ est l'ensemble des racines réelles du polynôme χ_A, tandis que l'ensemble $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ est l'ensemble des racines complexes du polynôme χ_A.

b) Comme $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, on peut toujours choisir d'étudier les éléments propres d'une matrice sur le corps $\mathbb{C}$.

Exemple 9 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ \lambda & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{=} \lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne ce dernier déterminant, on obtient que

$$\chi_A(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda\big((\lambda+1)(\lambda-1)+2\big) = \lambda\big(\lambda^2+1\big).$$

D'après lé théorème précédent, on en déduit que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$ et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.

Définition (Ordre de multiplicité d'une valeur propre) : L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de la matrice M, noté $m_\lambda(M)$, est l'ordre de multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_M.

Théorème 6 : Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M, alors on a l'inégalité

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(M)) \leqslant m_\lambda(M).$$

Remarque 10 : Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique : on en déduit qu'elles ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

En effet, si deux matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, i.e. s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$, alors on a la relation

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \mathrm{I}_n - A = P(\lambda \mathrm{I}_n - B)P^{-1}.$$

On en déduit que $\lambda \mathrm{I}_n - A$ et $\lambda \mathrm{I}_n - B$ sont semblables pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, donc elles ont le même déterminant, i.e. le même polynôme caractéristique.

Théorème de Cayley-Hamilton : Le polynôme caractéristique χ_M est un polynôme annulateur de M.

Exercice 5 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer un polynôme annulateur non nul de A.
2. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Bilan : Une fois que l'on a fixé une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E, nous pouvons donc passer des objets définis dans le cadre des espaces vectoriels à des objets matriciels. Le tableau ci-dessous résume la correspondance entre ces deux aspects avec les notions de seconde année.

Représentation vectorielle	Lien	Représentation matricielle
$v \in E$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$f \in \mathscr{L}(E)$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
$v \in E_\lambda(f)$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$V \in E_\lambda(M)$
$\mathrm{Sp}(f)$	$=$	$\mathrm{Sp}(M)$
χ_f	$=$	χ_M
$m_\lambda(f)$	$=$	$m_\lambda(M)$
$\mathrm{tr}(f)$	$=$	$\mathrm{tr}(M)$
$\det(f)$	$=$	$\det(M)$

Partie II Endomorphismes et matrices diagonalisables

II.A - Cas des endomorphismes

Dans cette partie, on considère un élément $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

Définition (Endomorphisme diagonalisable) : L'endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale.

Remarque 11 : On peut reformuler la définition précédente. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathscr{B}$ de E constituée de vecteurs propres pour f.

Exemples 10 :

a) Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'endomorphisme défini par $f : P \mapsto P + XP'$. Dans la base canonique $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$
donc l'endomorphisme f est diagonalisable.

b) Toute homothétie vectorielle de E est diagonalisable, car sa matrice dans toute base de E est diagonale.

c) Tout projecteur vectoriel $p \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable, car si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad r = \mathrm{rang}(p).$$

d) Toute symétrie vectorielle $s \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable, car si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & -\mathrm{I}_\ell \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (k, \ell) \in \mathbb{N}^2.$$

Théorème 7 : L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$.

On rappelle qu'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il s'écrit comme un produit de facteurs de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$. Par le théorème de d'Alembert-Gauss, tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés sur $\mathbb{C}$. Par contre, ce n'est pas le cas de tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$: par exemple le polynôme $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème (Caractérisations géométriques des endomorphismes diagonalisables) : Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) L'endomorphisme f est diagonalisable.

(ii) On a la relation
$$\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)).$$

(iii) Le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f), \quad \dim(E_\lambda(f)) = m_\lambda(f).$$

Exercice 6 : On définit l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{C}_3[X] \to \mathbb{C}_3[X]$ par $\varphi : P \mapsto (X^2-1)P'' - (X-1)P'$.

1) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme φ.
2) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'endomorphisme $\Delta : P \mapsto P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est-il diagonalisable ?

Corollaire 1 : Si l'endomorphisme f admet $\dim(E)$ valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable et les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles.

ATTENTION : La réciproque du corollaire est fausse ! Par exemple, une homothétie est diagonalisable, mais elle admet une unique valeur propre.

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$ par $\varphi : P \mapsto P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)$.

1) Déterminer les valeurs propres de φ.
2) Montrer que φ est diagonalisable.
3) Calculer $\varphi\left((X-1)^k\right)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.
4) En déduire les sous-espaces propres de φ.

Théorème (Caractérisations algébriques des endomorphismes diagonalisables) : Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) L'endomorphisme f est diagonalisable.

(ii) L'endomorphisme f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

(iii) Le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X-\lambda)$ est un polynôme annulateur de f.

Corollaire 2 : Si f est un endomorphisme diagonalisable et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors la restriction de f à F est diagonalisable.

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$ par $\varphi : P \mapsto P(1-X) + 2P(X)$.
Calculer φ^2, puis en déduire que φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

II.B - Cas des matrices

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition (Matrice diagonalisable) : La matrice M est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque 12 : Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors il résulte de la définition précédente et de la formule du changement de base que l'on a l'équivalence

$$f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est diagonalisable.}$$

Théorème 8 : La matrice M est diagonalisable si et seulement si $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} E_\lambda(M)$.

Théorème (Caractérisations géométriques des matrices diagonalisables) : Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La matrice M est diagonalisable.

(ii) On a la relation
$$\dim\left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda(M)).$$

(iii) Le polynôme caractéristique χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$ et
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M), \quad \dim(E_\lambda(M)) = m_\lambda(M).$$

Corollaire 3 : Si la matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres distinctes, alors M est diagonalisable et les sous-espaces propres de M sont des droites vectorielles.

ATTENTION : La réciproque du corrolaire est fausse! Par exemple, une matrice de la forme $M = \lambda \mathrm{I}_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ est diagonalisable, mais elle admet une unique valeur propre.

Exercice 10 : Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante
$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A_m.
2) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ est-elle diagonalisable ?

Théorème (Caractérisations algébriques des matrices diagonalisables) : Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La matrice M est diagonalisable.

(ii) La matrice M admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

(iii) Le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de M.

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = 1$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Calculer M^2, puis en déduire que M est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

II.C - Méthode - Diagonaliser une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ que l'on souhaite diagonaliser si possible sur $\mathbb{K}$.

1) On calcule le polynôme caractéristique de A.
   a) Si χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$. On conclut que l'on ne peut pas la diagonaliser sur $\mathbb{K}$.
   b) Sinon, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres de A.
2) On détermine une base $\mathscr{B}_k$ de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_k}(A)$ de A.
   a) Si pour une valeur propre λ_k de A, on a $\dim(E_{\lambda_k}(A)) < m_{\lambda_k}(A)$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$. On conclut que l'on ne peut pas la diagonaliser sur $\mathbb{K}$.
   b) Sinon, on passe au point suivant.
3) En considérant la base $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p)$ de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a par la formule du changement de base que

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = P_{\mathscr{C} \to \mathscr{B}}$$

où $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice diagonale

$$D = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_{\lambda_1}(A)}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_{\lambda_2}(A)}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_{\lambda_p}(A)}).$$

Exemple 11 : On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Le polynôme χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, car son discriminant est strictement négatif. On en déduit que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 12 : On reprend la matrice A de l'exemple précédent que l'on souhaite diagonaliser sur $\mathbb{C}$. Son polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})$ qui est scindé sur $\mathbb{C}$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. On détermine une base de chacun des sous-espaces propres.

$$E_{\mathrm{i}}(A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{i}\,\mathrm{I}_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right),$$

$$E_{-\mathrm{i}}(A) = \mathrm{Ker}(-\mathrm{i}\,\mathrm{I}_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\right).$$

Comme $\dim\left(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})\right) = \dim\left(E_{\mathrm{i}}(A)\right) + \dim\left(E_{-\mathrm{i}}(A)\right)$, on en déduit que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Finalement, on a

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Remarque 13 : On constate dans l'exemple ci-dessus que les vecteurs propres sont conjugués. De manière générale, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une valeur propre d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors le nombre $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A et les sous-espaces propres associés sont conjugués. En effet, on a

$$V \in E_\lambda(A) \;\Leftrightarrow\; AV = \lambda V \underset{\substack{\text{Conjugaison} \\ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{\Longleftrightarrow} A\overline{V} = \bar{\lambda}\,\overline{V} \;\Leftrightarrow\; \overline{V} \in E_{\bar{\lambda}}(A).$$

En particulier, si on a $E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_p)$, alors $E_{\bar{\lambda}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\overline{V_1}, \dots, \overline{V_p}\right)$.

Exemple 13 : On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda\mathrm{I}_2-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2.$$

qui est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A)=\{1\}$. On détermine le sous-espace propre associé.

$$E_1(A)=\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_2-A)=\mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right).$$

On remarque que $\dim\big(E_1(A)\big)=1<2=m_1(A)$, donc la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 14 : On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

En utilisant l'opération élémentaire $C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3$, on obtient que

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda\mathrm{I}_3-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&-1&-1\\\lambda-4&\lambda-2&-1\\\lambda-4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&\lambda-2&-1\\1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}.$$

De plus, en utilisant $L_2\leftarrow L_2-L_1$ et $L_3\leftarrow L_3-L_1$, on obtient que le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(\lambda)=(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)^2.$$

qui est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$. Les valeurs propres de A sont 1 et 4. On détermine une base de chacun des sous-espaces propres.

$$E_1(A)=\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_3-A)=\mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right),$$

$$E_4(A)=\mathrm{Ker}(4\mathrm{I}_3-A)=\mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Comme $\dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)=\dim\big(E_1(A)\big)+\dim\big(E_4(A)\big)$, on en déduit que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Finalement, on a

$$A=PDP^{-1}\quad\text{avec}\quad P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

Exercice 12 : On considère les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&3&2\\-2&5&2\\2&-3&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune des matrices ci-dessus.

1) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice.
2) La matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 13 : On considère les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 & -1+2\mathrm{i} \\ 2 & 3+\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune des matrices ci-dessus.

1) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice.
2) La matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Si oui, la diagonaliser.

II.D - Méthode - Calculer les puissances d'une matrice diagonalisable

Lorsque l'on a réussi à diagonaliser une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il est facile de calculer ses puissances. En effet, si on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a la relation

$$A^k = \left(PDP^{-1}\right)^k = \left(PD\underbrace{P^{-1}\right)\left(P}_{\mathrm{I}_n}D\underbrace{P^{-1}\right)\left(P}_{\mathrm{I}_n}DP^{-1}\right)\cdots\left(PD\underbrace{P^{-1}\right)\left(P}_{\mathrm{I}_n}DP^{-1}\right) = PD^kP^{-1},$$

donc on peut calculer A^k car l'on connaît P, D^k et P^{-1}.

Exemple 15 : On souhaite calculer les puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

D'après l'exemple précédent, on a

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^k+2 & 4^k-1 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k+2 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k-1 & 4^k+2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 14 : On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Diagonaliser la matrice B, puis en déduire une expression de B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.E - Méthode - Résoudre un système différentiel à coefficients constants

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice diagonalisable $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La méthode ci-dessous permet de déterminer les fonctions vectorielles $X : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant le système différentiel $X' = AX$.

1) On diagonalise la matrice A : on détermine une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
2) En introduisant la fonction vectorielle $Y = P^{-1}X$, on se ramène à résoudre un système différentiel plus simple avec la suite d'équivalence ci-dessous.
$$X' = AX \quad \Leftrightarrow \quad X' = PDP^{-1}X \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}X' = DP^{-1}X \quad \Leftrightarrow \quad Y' = DY.$$
3) On détermine les solutions $Y : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ du système différentiel $Y' = DY$ en résolvant des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1.
4) En utilisant la relation $X = PY$, on en déduit les solutions du système différentiel $X' = AX$.

Exemple 16 : Résolvons le système différentiel sur $\mathbb{R}$ défini par
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}. \qquad (S)$$

En réduisant la matrice A, on trouve
$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient que Y est solution du système différentiel
$$Y' = DY \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & 2u \\ v' & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{si} \quad Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

En résolvant ces deux équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1, on en déduit que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{2t} \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

En substituant dans $X = PY$, on conclut que les solutions du système différentiel (S) sont
$$X : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 15 : Résoudre les systèmes différentiels suivants.

$$(i) \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 4x - 2y \\ y' & = & x + y, \end{array} \right. \qquad (ii) \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y + z \\ y' & = & -x + 2y + z \\ z' & = & x + z, \end{array} \right. \qquad (iii) \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x + 3y + \mathrm{e}^t \\ y' & = & -2x + 4y. \end{array} \right.$$

Exercice 16 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on suppose diagonalisable. Montrer que toutes les solutions $X : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{n,1(\mathbb{R})}$ du système différentiel $X' = AX$ sont bornées si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-$.

Partie III Endomorphismes et matrices trigonalisables

III.A - Cas des endomorphismes

Dans cette partie, on considère un élément $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

Définition (Endomorphisme trigonalisable) : L'endomorphisme f est trigonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est triangulaire.

Remarque 14 : On peut démontrer que l'on obtient une définition équivalente de trigonalisable en remplaçant la mention « triangulaire » par « triangulaire supérieure ».

Théorème (Caractérisation des endomorphismes trigonalisables) : L'endomorphisme f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 4 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Théorème 9 : On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres de f comptées avec multiplicité, alors

$$\mathrm{tr}(f) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \text{et} \quad \det(f) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Remarque 15 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les formules précédentes sont toujours vérifiées, car tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Exemple 17 : On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z).$$

Le polynôme caractéristique de f est $\chi_f(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$. Les valeurs propres de l'endomorphisme f sont 1 et 4 avec les multiplicités $m_1(f) = 2$ et $m_4(f) = 1$. Le polynôme χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\mathrm{tr}(f) = 1 + 1 + 4 = 6 \quad \text{et} \quad \det(f) = 1 \times 1 \times 4 = 4.$$

III.B - Cas des matrices

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition (Matrice trigonalisable) : La matrice M est trigonalisable si M elle est semblable à une matrice triangulaire.

Remarque 16 : Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors il résulte de la définition précédente et de la formule du changement de base que l'on a l'équivalence

$$f \text{ est trigonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est trigonalisable.}$$

Théorème (Caractérisation des matrices trigonalisables) : La matrice M est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 5 : Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Théorème 10 : On suppose que χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$. Si $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres de M comptées avec multiplicité, alors

$$\mathrm{tr}(M) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \text{et} \quad \det(M) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Remarque 17 : Si on considère les valeurs propres complexes de M, les formules précédentes sont vérifiées.

Exercice 17 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathrm{Sp}\left(A^k\right) = \left\{\lambda^k \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\}$.

III.C - Méthode - Trigonaliser une matrice

Le programme ne demande pas de savoir trigonaliser de manière effective une matrice. Il faut se laisser guider par les énoncés des exercices.

Remarque 18 : Lorsque l'on a réussi à trigonaliser une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il est souvent possible de calculer ses puissances. En effet, si on peut écrire $A = PTP^{-1}$ avec une matrice triangulaire $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors on a la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PT^kP^{-1}.$$

Pour conclure, il faut réussir à calculer T^k pour en déduire A^k.

Exemple 18 : On souhaite calculer les puissance de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ et on a

$$E_2(A) = \mathrm{Ker}(2\mathrm{I}_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

On en déduit que la matrice A n'est pas diagonalisable. Pour trigonaliser la matrice A, il suffit de compléter le vecteur propre ci-dessus en choisissant un second vecteur non colinéaire à ce dernier, puis de poser

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$A^k = PT^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & -k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k-1}(2-k) & -k2^{k-1} \\ k2^{k-1} & 2^{k-1}(2+k) \end{pmatrix}.$$

Exercice 18 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

1) La matrice A est-elle diagonalisable ?
2) Trigonaliser la matrice A.
3) En déduire un expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.