Mathématiques

PSI

Lycée Couffignal

SESSION 2025

Préparation aux oraux

Sommaire

Partie I Concours Commun INP

I.A - Modalités de l'épreuve orale de mathématiques

Le Concours Commun INP comporte une épreuve orale de mathématiques qui dispose d'un coefficient 8 sur un total de 40 pour les épreuves orales.

L'épreuve a une durée de 1 heure répartie de la manière suivante :

1) une demi-heure pour présenter les documents administratifs et préparer le sujet qui ne contient qu'un seul exercice;
2) une demi-heure de présentation au tableau de l'exercice préparé et d'un autre dont l'énoncé est donné au bout de 20 minutes environ.

Le sujet proposé au candidat est composé d'un seul exercice portant sur le programme des deux années de classe préparatoire. Une fois entré dans la salle, le candidat prépare l'exercice pendant une demi-heure pendant qu'un autre candidat expose au tableau. Il présente ensuite son exercice puis l'examinateur l'interroge au bout de 20 minutes sur un exercice plus court pour illustrer une autre partie du programme.

L'épreuve orale porte sur l'ensemble des programmes de PCSI et de PSI.

I.B - Exercices avec préparation pour l'épreuve orale de mathématiques

Planche 1 **CCINP - Préparé - Année 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant n boules blanches et n boules rouges. On effectue un succession de tirages dans l'urne selon la règle suivante :

- si l'on pioche une boule rouge, on la remet dans l'urne;
- si l'on pioche une boule blanche, on la met de côté et on rajoute une boule rouge dans l'urne.

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note X_p la variable aléatoire qui désigne le nombre de boules blanches dans l'urne juste avant d'effectuer le p-ième tirage.

1. Donner la loi de X_1 et X_2.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X_p = n)$.
3. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Donner une relation entre $P(X_{p+1} = k)$, $P(X_p = k+1)$ et $P(X_p = k)$.
4. Justifier que la fonction génératrice G_p est polynomiale.

Dans la suite, on admet pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$ la relation $G_{p+1}(t) = G_p(t) + \dfrac{1-t}{2n} G'_p(t)$.

5. Donner une relation entre $E(X_{p+1})$ et $E(X_p)$, puis calculer $E(X_p)$.
   Déterminer sa limite lorsque p tend vers $+\infty$. Interpréter.

Planche 2 **CCINP - Préparé - Année 2024**

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si u est diagonalisable, alors u^2 est diagonalisable.
2. Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.
3. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors $\operatorname{Ker}\left(u^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}\right) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u + \lambda \mathrm{Id})$.
4. Montrer que si u est bijective, la réciproque de la question 1 est vraie.

Planche 3 — **CCINP - Préparé - Année 2024**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^3)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que u_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$.
2. Montrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$ qu'on a

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3. Montrer que la série de fonctions $\sum \left(u_{n+1} - u_n\right)$ converge normalement sur $[0,1]$.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur $[0,1]$ et que la fonction f est non nulle, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et qu'elle vérifie $f'(x) = f\left(x - x^3\right)$ pour tout $x \in [0,1]$.

Planche 4 — **CCINP - Préparé - Année 2024**

Pour tout $(A,B) \in \mathbb{R}[X]^2$, on définit

$$\phi : (A,B) \to (A \mid B) = \int_0^{+\infty} A(t)B(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, puis que $\left(X^k \mid 1\right) = k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Dans la suite, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note Q le projeté orthogonal de 1 sur $F = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^n)$.

2. Montrer qu'il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k$.

Dans la suite, on considère le polynôme $P = 1 - \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j=1}^k (X+j)$.

3. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, calculer $\left(1 - Q \mid X^i\right)$ et en déduire que $P(i) = 0$.
4. En déduire une expression de P.
5. Montrer que $\inf_{\alpha\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

Planche 5 — **CCINP - Préparé - Année 2024**

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on considère l'intégrale

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^p \ln^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $I_{n,p}$ est une intégrale convergente.
2. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Déterminer une relation de récurrence entre $I_{n,p}$ et $I_{n-1,p}$.
3. En déduire une expression explicite de $I_{n,p}$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.
4. Montrer que $\int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

Planche 6 — **CCINP - Préparé - Année 2024**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$ et préciser le domaine de définition de sa somme.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $\alpha_n = \int_0^1 (1-t)t^{3n}\,\mathrm{d}t$.
3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1-t^{3N}}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$.
5. Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$.

Planche 7 — **CCINP - Préparé - Année 2024**

Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in (\mathbb{R}^*)^3$ tel que $\alpha+\beta=\gamma$ et $\beta \neq -\gamma$. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer χ_B en fonction de χ_A et en déduire le spectre de B. Même question pour C.
3. Montrer que si $X \in \mathrm{Ker}(A)$, alors $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(C)$.
4. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(C)) \geqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(A))$.
5. Diagonaliser C dans le cas où $\alpha=-1$, $\beta=3$ et $\gamma=2$.

Planche 8 — **CCINP - Préparé - Année 2024**

Soit $b>0$. On considère la fonction $I : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction I est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la fonction I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer pour tout $x>0$ que
$$I(x) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{u^2}}\mathrm{e}^{-bu^2}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad I'(x) = \int_0^{+\infty} -2\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{u^2}}\mathrm{e}^{-bu^2}}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$
4. Montrer à l'aide d'un changement de variable judicieux que $I'(x) = -\sqrt{\frac{b}{x}}\,I(x)$ pour tout $x>0$.
5. En déduire l'expression de $I(x)$ pour tout $x>0$.

Planche 9 — **CCINP - Préparé - Année 2024**

1. Soit la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$.
   (a) Vérifier que f est bien définie sur $[0,+\infty[$.
   (b) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.
   (c) Montrer pour tout $x \in [1,+\infty[$ que $f(x) = xf(x-1)$.
2. Soit la fonction $\varphi : x \mapsto \int_{x-1}^{x} \ln\big(f(u)\big)\,du$.
   (a) Montrer que φ est définie et dérivable sur $[1,+\infty[$, puis calculer φ'.
   (b) En déduire la limite de φ en $+\infty$.
   (c) En déduire la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\varphi(n)}$.

Planche 10 — **CCINP - Préparé - Année 2024**

Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer le polynôme caractéristique P_a de M_a.
   (b) Effectuer la division euclidienne de $3P_a$ par P_a'.
   (c) En déduire les valeurs de a pour lesquelles M_a est diagonalisable.
2. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M_a telle que $|\lambda| \geqslant 1$. Montrer que $|a| \geqslant \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|} \geqslant \frac{1}{2}$.
   (b) Montrer que si $|a|$ est assez petit, alors la suite $\left(M_a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers O_3.

Planche 11 — **CCINP - Préparé - Année 2024**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 t^n e^{-\frac{1}{t}}\,dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrale I_n est-elle bien définie ? Quel est son signe ?
2. Déterminer la monotonie de la suite (I_n).
3. Déterminer la convergence de la suite (I_n) et sa limite. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que $(n+1)I_n + I_{n-1} = e^{-1}$.
4. En déduire que $I_n \sim (en)^{-1}$ lorsque $n \to +\infty$.
5. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} I_n x^n$. Dans la suite, on note g sa somme.
6. Préciser l'ensemble de définition de g.
7. Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $g_n : t \mapsto \begin{cases} t^n x^n e^{-\frac{1}{t}} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$
   (a) Montrer que la série $\sum g_n$ converge normalement.
   (b) Écrire $g(x)$ sous la forme d'une intégrale.

Planche 12 **CCINP - Préparé - Année 2024**

Soit $\alpha > 0$. On considère la fonction $f_\alpha : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^\alpha(t)\cos^n(t)$.

1. Donner l'intervalle de définition de f_α.
2. Pour $t \in [0, \pi/2]$, donner une expression simple de $f_\alpha(t)$.
3. Pour quelles valeurs de α, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Pour quelles valeurs de α, la série $\sum u_n(\alpha)$ converge-t-elle ?
   (b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(3)$.

Planche 13 **CCINP - Préparé - Année 2024**

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction $\varphi(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(f)(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,1], \quad \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de φ.
3. Montrer que 1 est valeur propre de φ et déterminer le sous-espace propre associé.
4. Déterminer l'ensemble des valeurs propres et des sous-espaces propres associés de φ.

Planche 14 **CCINP - Préparé - Année 2024**

Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $MM^\top = M^\top M$ et $M^2 + 2\mathrm{I}_2 = 0$.

1. Montrer que $M^\top M$ est diagonalisable.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}\left(M^\top M\right) \subset \{-2, 2\}$.
3. Montrer que $\mathrm{Sp}\left(M^\top M\right) \subset \mathbb{R}_+$. En déduire les valeurs propres de $M^\top M$.
4. Montrer que $2^{-1/2}M$ est orthogonale.
5. Montrer que $2^{-1/2}M$ est la matrice d'une rotation d'angle θ à déterminer.
6. Déterminer toutes les matrices M possibles.

Planche 15 **CCINP - Préparé - Année 2023**

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que f est continue sur D.
3. Pour tout $x \in D$, montrer que $1 - x \in D$ et $f(1-x) = f(x)$.
4. Déterminer un équivalent de f aux bornes de D.

Planche 16 — **CCINP - Préparé - Année 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{nt}}{\left(1+\mathrm{e}^t\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n2^n} + \dfrac{n-1}{n} I_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On pose $J_n = nI_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Calculer J_1. En déduire que $J_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Planche 17 — **CCINP - Préparé - Année 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite (a_n) converge vers 0.
2. Étudier la convergence de la série $\sum (-1)^n a_n$.
3. On considère la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R et on note f sa somme.
   (a) Montrer que $a_n \geqslant (n+1)^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire la valeur de R.
   (c) Montrer qu'on a $(2n+3)a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Montrer que f vérifie une équation différentielle d'ordre 1 à déterminer.

Planche 18 — **CCINP - Préparé - Année 2023**

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale I converge.
2. Montrer pour tout $t \in]0,+\infty[$ que $\dfrac{\sin(t)}{\mathrm{sh}(t)} = 2\mathrm{e}^{-t}\sin(t)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2nt}$.
3. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2+1}$.
4. Montrer qu'on a l'encadrement $\dfrac{\pi}{4} \leqslant I \leqslant 1 + \dfrac{\pi}{4}$.

Planche 19 — **CCINP - Préparé - Année 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On considère $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et l'application $u : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$u : M \mapsto aM + bM^{\top}.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de u.
3. En déduire que u est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.
4. Déterminer la trace et le déterminant de u.

Planche 20 — **CCINP - Préparé - Année 2023**

Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on considère

$$I_{n,k} = \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}.$$

1. Montrer que l'intégrale $I_{n,k}$ converge pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
2. Calculer l'intégrale $I_{n,k}$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
4. Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{\mathrm{e}^t - tx}\,\mathrm{d}t$.

Planche 21 — **CCINP - Préparé - Année 2023**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\alpha^n}{n!}\cos(nx)$ et $U(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle.
2. Montrer que U est définie sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que U est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $U(x) = \exp\big(\alpha\cos(x)\big)\cos\big(\alpha\sin(x)\big)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Soit $V : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$. Montrer que V est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $V(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
6. On définit $I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)U(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
   (b) Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.C - Exercices sans préparation pour l'épreuve orale de mathématiques

Planche 22 — **CCINP - Non préparé - Année 2024**

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soit $(u_1, \dots, u_{n+1})$ une famille de vecteurs unitaires de E deux à deux distincts tels que

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2 \quad \text{avec} \quad i \neq j, \quad (u_i \mid u_j) = a.$$

1. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $j \in [\![1, n]\!]$. Calculer $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \mid u_j - u_{n+1}\right)$.
2. Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E.

Planche 23 — **CCINP - Non préparé - Année 2024**

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^p}{2^n}$ converge.
2. On pose $S_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer S_p avec $S_0, \dots, S_{p-1}$ en faisant apparaître le développement de $(n+1)^p$.
   (b) Montrer que $S_p \in \mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Planche 24 — **CCINP - Non préparé - Année 2024**

1. Rappeler la forme d'une matrice de Vandermonde et l'expression de son déterminant.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on définit $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.
3. Montrer, sans les calculer, que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ admet trois racines distinctes dans $\mathbb{C}$, que l'on notera α, β et γ.
4. Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z & = & 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z & = & 0. \end{array} \right.$$

Planche 25 — **CCINP - Non préparé - Année 2024**

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $A^3 + A = O_3$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.
2. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
3. On suppose que $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. À quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Planche 26 — **CCINP - Non préparé - Année 2024**

On considère la partie de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Montrer que $(A,B) \mapsto \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer une base de $E^\perp$.

Planche 27 — **CCINP - Non préparé - Année 2024**

Soient $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par $m_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

1. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la matrice A est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de A. Quelles sont les valeurs propres de A?

Planche 28 — **CCINP - Non préparé - Année 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique P.

1. On suppose que P admet n racines réelles distinctes. Montrer que A et B sont semblables.
2. Trouver deux matrices ayant le même polynôme caractéristique mais qui ne sont pas semblables.

Planche 29 — **CCINP - Non préparé - Année 2024**

Soit $(A,B,C) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^3$ tel que $C \neq 0_n$ et $AC = CB$.

1. Montrer que $A^k C = CB^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $P(A)C = CP(B)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que deux matrices M et N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont inversibles si et seulement si MN est inversible. En déduire que les matrices A et B ont une valeur propre commune.

Planche 30 — **CCINP - Non préparé - Année 2024**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \sin(nx)\mathrm{e}^{-n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $]a,+\infty[$ où $a > 0$.
3. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $]0,+\infty[$

Planche 31 — **CCINP - Non préparé - Année 2024**

1. Déterminer un triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,1\}, \qquad \frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}.$$

2. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $t\left(t^2-1\right)x' + 2x = t^2$ sur les intervalles de $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

Planche 32 — **CCINP - Non préparé - Année 2024**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on définit la fonction $g_n : y \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n + \ln^y(n)}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum g_n$.
2. Étudier la continuité de la somme $\sum g_n$.

Planche 33 — **CCINP - Non préparé - Année 2024**

On considère pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ le nombre

$$u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Rappeler le critère spécial des séries alternées.
2. Montrer que (u_N) converge.
3. La série dont (u_N) est la somme partielle à l'ordre N est-elle absolument convergente ?
4. Déterminer une expression de la limite de (u_N) sous la forme d'une intégrale.

Planche 34 — **CCINP - Non préparé - Année 2024**

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}.$$

Étudier si les matrices M et N sont diagonalisables.

Planche 35 — **CCINP - Non préparé - Année 2023**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M\left(M^\top M\right)^2 = \mathrm{I}_n$.

1. Montrer que M est inversible, puis que M est symétrique.
2. Montrer que $M = \mathrm{I}_n$.

Planche 36 — **CCINP - Non préparé - Année 2023**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer qu'il existe $R \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $A = R^2$.

Planche 37 — **CCINP - Non préparé - Année 2023**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 - A^2 + A - \mathrm{I}_n = \mathrm{O}_n$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont des racines du polynôme $X^3 - X^2 + X - 1$.
2. Déterminer le déterminant de A.
3. Montrer que la trace de A est un entier naturel.

Planche 38 — **CCINP - Non préparé - Année 2023**

Soit φ l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Planche 39 — **CCINP - Non préparé - Année 2023**

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les dérivées partielles premières de f. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que peut-on en déduire ?

Planche 40 — **CCINP - Non préparé - Année 2023**

On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \sin(xt)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi(x)$.

Planche 41 — **CCINP - Non préparé - Année 2023**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et la matrice

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ \mathrm{O}_n & \mathrm{O}_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

1. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable et exprimer les valeurs propres de B en fonction de celles de A.

Planche 42 — **CCINP - Non préparé - Année 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1\right] \mathrm{d}x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot k!}$.

Planche 43 — **CCINP - Non préparé - Année 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)$.

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la somme f de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Planche 44 — **CCINP - Non préparé - Année 2023**

Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice M.
2. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la matrice M est-elle diagonalisable ?

Planche 45 — **CCINP - Non préparé - Année 2023**

On note $D = \operatorname{Diag}(\lambda, \mu)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Soit φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\varphi : M \mapsto DM - MD$.

1. Déterminer les valeurs propres de φ.
2. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Planche 46 — **CCINP - Non préparé - Année 2023**

1. Pour tout $x \in]-1, 1[$, montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Planche 47 — **CCINP - Non préparé - Année 2023**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif a et b. Déterminer la loi de $X + Y$ de deux manières différentes.

Partie II Concours Mines -Télécom

II.A - Modalités de l'épreuve orale de mathématiques

Le Concours Mines -Télécom comporte une épreuve orale de mathématiques qui dispose d'un coefficient 8 sur un total de 30 pour les épreuves orales.

L'épreuve a une durée de 30 minutes (incluant l'arrivée et le départ du candidat) et elle est sans temps de préparation. Elle porte sur la résolution de deux exercices portant sur des parties différentes de l'ensemble des programmes de PCSI et de PSI.

Les candidats peuvent commencer par l'exercice de leur choix. Il y a donc une décision à prendre, pour cela l'examinateur laissera quelques minutes de réflexion avant de commencer l'oral proprement dit. Il est souhaitable que le candidat se décide assez rapidement et informe clairement l'examinateur par quel exercice il commence. On peut penser qu'il est préférable de commencer par la partie qu'on maîtrise le mieux, mais il faut être conscient que les deux exercices seront abordés pendant l'épreuve, pas forcément pendant la même durée.

II.B - Planches de l'épreuve orale de mathématiques

Planche 48 — **CMT - Année 2024**

Exercice. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = P(Y = k) = \frac{1 + a^k}{4 \times k!}.$$

1. Déterminer a.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice. On considère l'équation différentielle $\big(x\ln(x)\big)y' = \big(3\ln(x) + 1\big)y$ que l'on note (E).

1. Déterminer les solutions de (E) sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
2. Déterminer les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ par recollement.

Planche 49 — **CMT - Année 2024**

Exercice. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R}).$$

En faisant le moins de calcul possible, déterminer le rang de M, l'image de M et le noyau de M.

Exercice. On considère la fonction d'une variable réelle $h : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de h.
2. La fonction h est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Et sa dérivée ?

Planche 50 CMT - Année 2024

Exercice. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$.
2. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,1]$.
3. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$.
4. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice. Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = -u$.

1. Soit A la matrice associée à u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
   (b) Calculer la trace de A et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}\left(u^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
4. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Planche 51 CMT - Année 2024

Exercice. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,0,1\}$ telles que

$$P(X=-1) = P(X=0) = P(X=1) \quad \text{et} \quad P(Y=-1) = P(Y=0) = P(Y=1).$$

On considère la matrice aléatoire définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & X \\ -1 & Y \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité pour que la matrice M soit diagonalisable ?

Exercice. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt}\sin(t)\,dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale I_n est convergente et calculer sa valeur.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer qu'on a l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Planche 52 — **CMT - Année 2024**

Exercice. On considère la fonction d'une variable réelle $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f
2. Étudier la continuité et le caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction f sur $\mathscr{D}_f$.

Exercice. On considère des variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X=i, Y=j) = a\,\frac{i+j}{2^{i+j}}.$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.

Planche 53 — **CMT - Année 2024**

Exercice. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Exercice. On considère l'ensemble $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = x-y-z+t = 0\right\}$.

1. Montrer que F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.
2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale sur F pour le produit scalaire euclidien canonique.
3. Soit $u = (1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer la distance $d\left(u, F^{\perp}\right)$.

Planche 54 — **CMT - Année 2024**

Exercice. Soit E un espace euclidien. On considère un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{id}_E$ et

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x) \mid x\rangle = 0.$$

1. Montrer que E est de dimension paire. Dans la suite, on note $\dim(E) = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$.
2. Soit $x \in E$ non nul. Montrer que la famille $(u(x), x)$ est libre.
3. Montrer qu'il existe $e_1, \dots, e_p \in E$ tels que la famille $\left(e_1, u(e_1), \dots, e_p, u(e_p)\right)$ soit orthonormale.
4. En déduire que u est une isométrie.

Exercice. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ en utilisant le théorème d'intégration terme à terme.

Planche 55 **CMT - Année 2024**

Exercice. Soit E un espace euclidien. On considère un endomorphisme f de E tel que

$$\forall (x,y)\in E^2,\quad \langle f(x),y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle.$$

1. Montrer que pour tout $x\in E$, les vecteurs x et $f(x)$ sont orthogonaux.
2. Montrer que $s=f\circ f$ est un endomorphisme autoadjoint de E.
3. Soient a une valeur propre de s et $x\in E_a(s)\setminus\{0_E\}$. Montrer que

$$\langle s(x),x\rangle = a||x||^2 = -||f(x)||^2.$$

   En déduire que $a\leqslant 0$.
4. En déduire les valeurs propres de f.

Exercice. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\,]n,+\infty[$, on pose $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-k}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que la fonction f_n est strictement décroissante sur $]n,+\infty[$ et préciser les limites de cette fonction en n^+ et en $+\infty$.

Dans la suite de l'exercice, on fixe un réel $A>0$.

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n\in\,]n,+\infty[$ tel que $f_n(x_n)=A$.
3. Déterminer la limite de la suite (x_n).
4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $f_n(n+1)$ et montrer que $x_n\leqslant n+1$ à partir d'un certain rang.
5. En déduire un équivalent de la suite (x_n).

Planche 56 **CMT - Année 2023**

Exercice. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n=\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Exercice. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice telle que $A^3+A^2+A=\mathrm{O}_n$, alors $\mathrm{tr}(A)\in\mathbb{Z}$.

Planche 57 **CMT - Année 2023**

Exercice. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la fonction $f: t\mapsto \frac{1}{t}-\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{t}$.

Exercice. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 6 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer les matrices $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^3=A$. Même question pour $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
3. Déterminer les fonctions dérivables $X:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que $X'=AX$.

Planche 58 — **CMT - Année 2023**

Exercice. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = 0$ si X est impair et $Y = \frac{X}{2}$ si X est pair.

1. Rappeler les développements en série entière de cosinus et sinus hyperbolique.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de Y^2.

Exercice. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer le rang de A.
2. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique.
3. Déterminer les éléments propres de A.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Planche 59 — **CMT - Année 2023**

Exercice. Soient E un espace euclidien tel que $\dim(E) \geqslant 2$ et $(u, v) \in E^2$ tel que les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires. On définit l'application $\phi : E \to E$ par

$$\forall x \in E, \quad \phi(x) = \langle u \mid x \rangle v - \langle x \mid v \rangle u.$$

1. On note $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. Justifier que $E = F \oplus F^{\perp}$.
2. Écrire la matrice de ϕ dans une base adaptée à cette décomposition.
3. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

Exercice. On considère la fonction d'une variable réelle $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^{-k}\right)$.

Planche 60 — **CMT - Année 2023**

Exercice.

1. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que l'équation $1 + \ln(x + n) = x$ admet une unique solution $u_n \in \mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$ que $\ln(n) < u_n < n$, puis en déduire un équivalent de u_n.

Exercice. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer que la matrice A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Planche 61 — **CMT - Année 2023**

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Étudier la diagonalisabilité de A et donner ses éléments propres.

Exercice. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $(n,p) \in \mathbb{N} \times]0,1[$. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Soit Z la variable aléatoire définie par

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \neq 0 \\ Y(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) = 0. \end{cases}$$

Déterminer la loi de Z, puis son espérance et sa variance.

Planche 62 — **CMT - Année 2023**

Exercice. Une maladie circule dans la population et on note p la probabilité d'être contaminé. La probabilité d'être contaminé par contagion (contact avec un malade) est égale à $\frac{2}{3}$. On considère un commercial qui passe voir n clients durant sa journée de travail. On note N la variable aléatoire représentant le nombre de clients contaminés rencontrés par le commercial.

1. Déterminer la loi de N.
2. Quelle est la probabilité que le commercial ne soit pas contaminé à la fin de sa journée de travail ?

Exercice.

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière à coefficients complexes.
2. Soit (a_n) une suite bornée telle que $\sum a_n$ diverge. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$.

Planche 63 — **CMT - Année 2023**

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = i j^2$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

1. Déterminer le rang de A et déterminer ses valeurs propres sans calculer le polynôme caractéristique.
2. En déduire que A est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de A.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre $1/n$. Montrer les inégalités

$$P\left(X \geqslant n^2\right) \leqslant \frac{1}{n}, \qquad P\big(|X-n| \geqslant n\big) \leqslant 1 - \frac{1}{n}, \qquad P(X \geqslant 2n) \leqslant 1 - \frac{1}{n}.$$

Planche 64 — **CMT - Année 2023**

Exercice. Soit s une symétrie d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $\phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ l'application définie par $\phi : u \mapsto \phi(u) = \dfrac{1}{2}(u \circ s + s \circ u)$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.
2. Déterminer un polynôme annulateur de ϕ.
3. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

Exercice. Soit $\theta \in]0,\pi[$. On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \sin(k\theta)x^k$.

1. Montrer par l'absurde que la suite $\big(\sin(k\theta)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière dont f est la somme.
3. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-R,R[$.

Planche 65 — **CMT - Année 2023**

Exercice. Soit $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E. On considère l'endomorphisme u de E défini par $u(e_i) = e_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$ et $u(e_n) = e_1$.

1. Que peut-on dire des cas $n = 2$ et $n = 3$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'endomorphisme u est-il une isométrie? Préciser si elle est directe ou indirecte selon la valeur de n.

On suppose à présent que $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et on définit $u \in \mathscr{L}(E)$ comme précédemment.

3. Donner le rang de $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
4. Soit $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

   (a) Exprimer A en fonction de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et en déduire les valeurs propres complexes de A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

Exercice. On note $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}$ et on considère la fonction $g : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$g : (x,y) \mapsto \begin{cases} xy\ln\big(x^2+y^2\big) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.
2. Montrer que g admet des extremums globaux sur D.
3. La fonction g admet-elle un extremum local en $(0,0)$? Déterminer les extremums locaux et les extremums globaux sur le bord de D.

Partie III Concours Centrale-Supélec

III.A - Modalités des épreuves orales de mathématiques

Le Concours Centrale-Supélec comporte deux épreuves orales de mathématiques qui disposent chacune d'un coefficient 12 sur un total de 100 pour les épreuves orales.

Mathématiques 1. L'épreuve de mathématiques 1 est une épreuve sans préparation d'une durée d'environ 30 minutes. L'usage de la calculatrice est autorisé mais dans les faits très rare.

Les candidats se voient proposer un exercice qui comporte peu de questions, certaines pouvant être données au fur et à mesure de l'épreuve et en fonction de l'avancée du candidat. L'exercice est progressif et dans son début très proche du cours. Il est tout à fait possible d'avoir une bonne note sans avoir répondu à toutes les questions. Le sujet proposé est avant tout un support pour évaluer les connaissances des candidats sur plusieurs parties du programme et sa faculté à mener un dialogue réfléchi avec l'interrogateur.

Dans le même but l'interrogateur peut être amené à poser quelques questions en dehors de l'exercice, ce sans corrélation avec le niveau de la prestation du candidat.

Mathématiques 2. L'épreuve de mathématiques 2 est subdivisée en deux parties : une phase de préparation d'une demi-heure et une phase d'interrogation durant 25 minutes environ.

L'épreuve de mathématiques 2 est une épreuve de mathématiques utilisant l'outil informatique. Un ordinateur équipé des environnements de développement Pyzo et Spyder est mis à disposition des candidats. Des fiches d'aide présentant différentes fonctions Python pouvant être utiles sont fournies lors de l'épreuve sous forme papier ainsi que sous forme d'un fichier PDF présent sur l'ordinateur. Ces fiches sont consultables en ligne sur le site du concours. L'outil informatique peut être employé pour effectuer des calculs, des tracés de courbes ou de surfaces, étudier des exemples numériques correspondant à un problème théorique donné, effectuer des calculs matriciels (par exemple résoudre un système linéaire ou rechercher les éléments propres d'une matrice), simuler une expérience aléatoire, émettre des conjectures...

Dans cette épreuve, le jury évalue la capacité des candidats à aborder de manière constructive les notions du programme de mathématiques de la filière PSI, à choisir la meilleure représentation d'un objet pour résoudre un problème donné, à organiser de manière claire un calcul complexe. La capacité à s'exprimer et la rigueur de la démarche sont aussi prises en compte dans la notation.

III.B - Planches de l'épreuve orale de mathématiques 1

Planche 66 — **CCS - M1 - Année 2024**

On considère la fonction $f : \mathbb{C}\setminus\{-3\} \to \mathbb{C}$ définie par $f : z \mapsto \dfrac{3z}{3+z}$.

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
2. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g : \theta \to \dfrac{\sin(\theta)}{5+3\cos(\theta)}$.

   (a) Calculer $\operatorname{Im}\left(f\left(e^{i\theta}\right)\right)$. Montrer que $g(\theta)$ peut s'écrire sous la forme $g(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\theta)$ où $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.

   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Planche 67 — **CCS - M1 - Année 2024**

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on considère l'intégrale $I_{a,b}=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble des $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale $I_{a,b}$ converge.
2. Soit $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Exprimer $I_{a,b}$ sous la forme d'une somme d'une série numérique.
3. Montrer que les fonctions $x\longmapsto I_{x,y}$ et $y\longmapsto I_{x,y}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Planche 68 — **CCS - M1 - Année 2024**

On considère l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f:(x,y)\longmapsto\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)^x & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Étudier les variations de $\varphi: t\longmapsto t^t$ sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
4. Étudier les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

Planche 69 — **CCS - M1 - Année 2024**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $B=A^\top A$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on identifie $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que les valeurs propres de B sont positives.

Dans la suite, on note $0\leqslant\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_p$ les valeurs propres de B. Pour toute matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$N(M)=\sup\left\{\frac{\|MX\|}{\|X\|}\in\mathbb{R}\ \middle|\ X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{n,1}\}\right\}.$$

2. Montrer que $N(A)=\sqrt{\lambda_p}$.
3. On suppose que A est inversible. Exprimer $C(A)=N(A)\cdot N\left(A^{-1}\right)$ en fonctions des valeurs propres de B.

Planche 70 — **CCS - M1 - Année 2024**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $J\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de J.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on identifie $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.

2. Justifier l'existence de $\sigma(M)=\sup\limits_{X\in S}\|MX\|$ où $S=\left\{X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\mid\|X\|=1\right\}$, puis montrer que
$$\sigma(M)\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_{i,j}^2}.$$
3. Montrer que $\sigma(J)=n$.
4. Montrer que si $M\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\sigma(M)=\max\left\{|\lambda|\in\mathbb{R}\mid\lambda\in\mathrm{Sp}(M)\right\}$.

Planche 71 — **CCS - M1 - Année 2024**

Soient un espace euclidien E, un vecteur non nul $v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère $f : E \to E$ définie par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = x - \lambda \langle x \mid v \rangle \cdot v.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E.
2. (a) Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme f est-il une isométrie ?
   (b) Dans ce cas, déterminer la nature géométrique de f, puis préciser ses éléments caractéristiques.
3. Déterminer les éléments propres de f.

Planche 72 — **CCS - M1 - Année 2023**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n z^n$ soit de rayon infini. On note f sa somme.

1. Soient $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$2\pi a_p r^p = \int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-ipt}\,\mathrm{d}t.$$

2. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $|a_p| \leqslant M r^{-p}$ pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que $a_p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. En déduire que f est constante.
3. On suppose maintenant qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leqslant \alpha |z|^q + \beta.$$

   Montrer que f est une fonction polynôme.

Planche 73 — **CCS - M1 - Année 2023**

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ une série de nombres complexes absolument convergente. On désigne sa suite des sommes partielles par $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa somme par A.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, puis calculer sa valeur.
2. Montrer que les séries entières $\sum \dfrac{a_n}{n!} t^n$ et $\sum \dfrac{A_n}{n!} t^n$ ont un rayon de convergence infini.
3. On note f et g les sommes respectives des séries entières ci-dessus.
   (a) Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $f'(t) = g'(t) - g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer pour tout $t \in \mathbb{R}$ que $\displaystyle\int_0^t f(u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-t}(g(t) - f(t))$, puis que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = A$.

Planche 74 — **CCS - M1 - Année 2023**

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right)$ soit libre. Montrer que la famille $\left(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1}\right)$ est libre. Que peut-on dire de la famille $(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^n)$?
2. On suppose désormais que u est diagonalisable et que la famille $\left(\mathrm{Id}_E, \ldots, u^{n-1}\right)$ libre. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\left(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right)$ soit libre.

III.C - Planches de l'épreuve orale de mathématiques 2

Planche 75 — **CCS - M2 - Année 2024**

On note $H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Pour tout $q = (a, u) \in H$ et $q' = (b, v)$, on définit $q \times q'$ par

$$q \times q' = \big(ab - \langle u \mid v\rangle, av + bu + u \wedge v\big).$$

1. Écrire une fonction Python calculant $q \times q'$. Tester votre fonction pour calculer $\big(1, (1,1,1)\big) \times \big(-1, (0,0,1)\big)$ et $\big(-1, (0,0,1)\big) \times \big(1, (1,1,1)\big)$. Que remarque-t-on ?
2. On définit $C : H \to H$ par $C : (a, u) \mapsto (a, -u)$. Montrer que C est un automorphisme. Quelle transformation géométrique réalise C ? Donner ses éléments caractéristiques.
3. Écrire une fonction Python calculant $C(q)$ et la tester.
4. Soit $(q, q') \in H^2$. Exprimer $C(q \times q')$ en fonction de $C(q)$ et de $C(q')$.
5. Montrer que l'on peut définir une norme N à l'aide de $q \times C(q)$.
6. Pour tout $q \in H$ non nul, on définit $q^{-1} = \dfrac{C(q)}{N(q)}$. Justifier cette notation.

Planche 76 — **CCS - M2 - Année 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice à spectre diagonal toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\chi_M(X) = \prod_{k=1}^{n} \big(X - m_{k,k}\big).$$

On note $\mathscr{E}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à spectre diagonal.

1. Justifier que toute matrice à spectre diagonal est trigonalisable.
2. (a) Écrire une fonction Python `pol(M)` qui renvoie la liste des coefficients du polynôme $\prod_{k=1}^{n} (X - m_{k,k})$.

   (b) Calculer à l'aide de Python le polynôme caractéristique des matrices suivantes et indiquer si elles sont à spectre diagonal.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Décrire l'ensemble $\mathscr{E}_2(\mathbb{R})$.
4. (a) On considère une matrice triangulaire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathrm{O} & C \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et C sont à spectre diagonal, alors M est à spectre diagonal.

   (b) Montrer qu'il existe une matrice dans $\mathscr{E}_4(\mathbb{R})$ qui a 13 coefficients non nuls.
5. Soit $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{E}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que M^2 est diagonalisable et en déduire que $M^2 = \mathrm{O}_n$.

   (b) Exprimer $\operatorname{tr}\big(M^2\big)$ en fonction des coefficients de M. En déduire que $M = \mathrm{O}_n$.
6. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $F \subset \mathscr{E}_n(\mathbb{R})$?

Planche 77 — **CCS - M2 - Année 2024**

Soit une urne contenant $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotés de 1 à n. On tire n boules successivement avec remise. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de boules distinctes piochées au bout des n tirages.

1. (a) Écrire une fonction Python, prenant en argument un entier n, qui simule la variable X.
   (b) En déduire deux fonctions Python, d'argument d'entrée n, une donnant la loi de X (i.e. le vecteur des probabilités) et l'autre donnant l'espérance de X. Tester votre programme pour $n = 3$.
2. Par la théorie, calculer l'espérance de X pour $n = 3$.
3. On revient au cas général où n boules sont tirées.
   (a) Calculer $P(X = 1)$ et $P(X = n)$.
   (b) Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = n - 1)$.
4. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i l'indicatrice de l'évènement « la boule numéro i a été pioché au cours des n tirages ». Exprimer $\mathrm{E}(X)$ avec $X_1, \dots, X_n$ puis déterminer un équivalent de $\mathrm{E}(X)$ lorsque n tend vers l'infini.

Planche 78 — **CCS - M2 - Année 2023**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $J_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \,\mathrm{d}u$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le domaine de définition D_n de J_n, puis calculer $J_n(x)$ pour tout $x \in D_n$.
2. On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n : t \mapsto \begin{cases} t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.
   (a) Tracer en Python les fonctions $t \mapsto u_n(t)$ pour $n \in \{2, 5, 10\}$ et $t \mapsto u(t)$ en prenant $x = 1$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une fonction u à préciser.
   (c) Justifier l'existence et déterminer la limite $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n u_n(t)\,\mathrm{d}t$ sous la forme d'une intégrale.
   (d) Tracer la fonction Γ avec Python.
   (e) Montrer que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Planche 79 — **CCS - M2 - Année 2023**

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0(a) = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(a) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{u_n(a)}{1 + \sqrt{1 + u_n(a)^2}}\right).$$

1. Écrire une fonction `suite(a,N)` en Python qui renvoie la liste des `N` premiers termes de $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$. Calculer `suite(0,5)` et `suite(4,10)`.
2. Calculer `suite(-1,10)`, `suite(6,10)` et `suite(10,10)`. Émettre une conjecture (C_1) sur $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer les 10 premiers termes de la suite $(2^n u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ pour différentes valeurs de $a \in \mathbb{R}$. Émettre une conjecture (C_2) sur la suite $(2^n u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Tracer en Python la fonction $a \mapsto 2^{10} u_{10}(a)$ pour $a \in [-30, 30]$.
5. Montrer que $|\operatorname{Arctan}(x)| \leqslant |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis démontrer la conjecture (C_1).
6. Étudier la nature des séries $\sum u_n(a)$, $\sum u_n(a)^2$ et $\sum \ln\left(\dfrac{2u_{n+1}(a)}{u_n(a)}\right)$.
7. En déduire une preuve de la conjecture (C_2).

Partie IV Concours Commun Mines-Ponts

IV.A - Modalités de l'épreuve orale de mathématiques

Le Concours Commun Mines-Ponts comporte une épreuve orale de mathématiques qui dispose d'un coefficient 9 sur un total de 41 pour les épreuves orales.

L'oral de mathématiques de la filière PSI se déroule en deux temps : un temps de préparation sur table d'une quinzaine de minutes environ suivie d'un exposé au tableau pouvant aller de 50 minutes à une heure. À son entrée dans la salle, le candidat se verra proposer un premier exercice à préparer. Le deuxième sera donné pendant l'exposé et devra être traité directement. L'examinateur décide du moment pour changer de sujet sans attendre nécessairement que le premier exercice soit traité intégralement. En pratique la durée de chaque exercice sera la plupart du temps comprise entre 20 et 35 minutes, à la discrétion de l'examinateur.

Les deux exercices porteront de préférence sur des parties différentes du programme : algèbre puis analyse ou analyse puis probabilité par exemple. Le candidat pourra être interrogé sur la totalité des programmes de PCSI et de PSI. Un troisième exercice pourra parfois être proposé par l'examinateur. Cette proposition ne doit pas être interprétée comme un signe ou une condition de réussite de l'épreuve et n'influe pas en elle-même sur la note finale. Enfin, il convient de rappeler que la note finale obtenue par le candidat est toujours à interpréter comme un outil de classement relatif à l'ensemble des admissibles et non comme un jugement de valeur.

IV.B - Planches de l'épreuve orale de mathématiques

Planche 80 **CCMP - Année 2024**

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on définit $\varphi : (P,Q) \mapsto P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$ est une base orthogonale de E. En déduire une base orthonormée $\mathscr{C}$ de E.
3. On considère l'application $f : P \mapsto P(1-X)$.
   (a) Montrer que f est un automorphisme de E. Déterminer f^{-1}.
   (b) L'automorphisme f est-il une isométrie vectorielle ?
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Sa matrice dans la base $\mathscr{C}$ est-elle symétrique ?

Planche 81 **CCMP - Année 2024**

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On considère une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & c \\ a & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $A^3 + dA = \mathrm{O}_3$.
2. Déterminer d, puis exprimer A^{2n} en fonction de n, d et A^2 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \mathrm{I}_3 + \alpha A + \beta A^2.$$

Planche 82 — **CCMP - Année 2024**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0,\pi[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.
2. (a) Montrer que la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

   (b) En déduire la nature de $\sum u_n^2$, puis celle de $\sum u_n$.
3. Déterminer un équivalent de u_n.

Planche 83 — **CCMP - Année 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

1. Soit $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\rho : x \mapsto \|x\|^2$. Montrer que ρ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer les dérivées partielles de ρ.
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}$ de la forme $f : x \mapsto g\left(\|x\|^2\right)$, où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, telles que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0.$$

Planche 84 — **CCMP - Année 2024**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non nulle de complexes telle que la série entière $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence infini et on désigne sa somme par f. On définit la fonction $m_f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad m_f(r) = \ln\left(\sup\left\{|f(z)| \in \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{C} \text{ avec } |z| \leqslant r\right\}\right).$$

1. Montrer que m_f est bien définie et croissante, puis établir que

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ avec } |z_0| \leqslant r, \quad m_f(r) = \ln|f(z_0)|.$$

2. Si f est polynomiale, calculer la limite $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{m_f(r)}{r}$.
3. Montrer qu'on a l'égalité

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

   En déduire que

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ avec } |z_0| = r, \quad m_f(r) = \ln|f(z_0)|.$$

Planche 85 — **CCMP - Année 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit le commutant de A par

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\}.$$

Montrer que $\dim(\mathscr{C}(A)) \geqslant n$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, puis étudier les cas d'égalité.

Planche 86 — **CCMP - Année 2024**

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$ si et seulement si il existe $C > 0$ tel que $\|f(x)\| \leqslant C\|f^2(x)\|$ pour tout $x \in E$.

Planche 87 — **CCMP - Année 2024**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. Dans la suite, on note sa somme S.
2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$ qu'on a
$$\left| S(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k} \right| \leqslant \frac{1}{x+n}.$$
   En déduire la convergence uniforme de $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
4. Montrer la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R} \setminus \{-n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
5. Monter que S est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{-n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Planche 88 — **CCMP - Année 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

1. Montrer $\varphi : (A, B) \mapsto \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^\top A$.
3. Montrer que pour tout $(S, S') \in \left(\mathscr{S}_n^{++}\right)^2$, on a $\operatorname{tr}\left(SS'\right) > 0$.

Planche 89 — **CCMP - Année 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(A^2\right) = \cdots = \operatorname{tr}(A^n) = 0$.
2. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB - BA = B$. Montrer que B est nilpotente.

Planche 90 — **CCMP - Année 2024**

Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ et $g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues telles que $f \circ g = g \circ f$.

1. Dans cette question, on suppose que $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a $f^{\circ n}(x) \geqslant g^{\circ n}(x) + n\alpha$.
2. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Planche 91 **CCMP - Année 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in [\![0, n-1]\!]$. On considère une urne composée de n boules : une boule rouge, b boules blanches et $n-b-1$ boules noires. On procède à une succession de tirages avec remise dans l'urne jusqu'à tirer la boule rouge. On note T la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués et X la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches tirées durant l'expérience.

1. Soit $r \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant r} \binom{n}{r} x^{n-r}$ dont on calculer sa somme.
2. Donner la loi de la variable aléatoire T.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in \mathbb{N}$, calculer $P_{(T=k)}(X = i)$.
4. En déduire la loi de X, puis calculer son espérance et sa variance.

Planche 92 **CCMP - Année 2024**

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et on note

$$S_A = \left\{P^{-1}AP \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\}$$

l'ensemble des matrices semblables à A. On fixe $\delta > 0$ et on note $P_\delta = \mathrm{Diag}\left(\delta, \delta^2, \ldots, \delta^n\right)$.

1. Déterminer les coefficients de $P_\delta^{-1} A P_\delta$.
2. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$. Montrer qu'il existe une suite (B_p) de matrices de S_A convergeant vers la matrice nulle. On pourra commencer par trigonaliser la matrice A.
3. Réciproquement, montrer que s'il existe une suite (B_p) de matrices de S_A convergeant vers la matrice nulle, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_n$.

Planche 93 **CCMP - Année 2024**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de triplets $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que

$$3a + 4b + 5c = n.$$

Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers ∞. On pourra commencer par trouver pour tout $m \in \mathbb{N}$ un encadrement de v_m qui désigne le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3a + 4b = m$.

Planche 94 **CCMP - Année 2024**

Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note (E_λ) l'équation d'inconnue $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ suivante :

$$X^p = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'équation (E_0) n'a pas de solution.
2. Déterminer les solutions de l'équation (E_1).

Planche 95 — **CCMP - Année 2024**

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0 : x \mapsto x$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\right).$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette suite de fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$.

Planche 96 — **CCMP - Année 2024**

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t-x/t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $2xy'' + y' - 2y = 0$.
3. En posant $y : x \mapsto z\left(\sqrt{x}\right)$, résoudre l'équation différentielle de la question précédente.
4. En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Planche 97 — **CCMP - Année 2024**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et un entier $d \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer les endomorphismes de E stabilisant tous les sous-espaces vectoriels de dimension d de E.

Planche 98 — **CCMP - Année 2023**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite ℓ en $+\infty$. On considère la fonction

$$g : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt.$$

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Planche 99 — **CCMP - Année 2023**

Montrer qu'il existe une unique fonction continue et bornée $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = 2 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{2 + f(t)^2}\,dt.$$

Planche 100 — **CCMP - Année 2023**

Soit $\theta \in]0, \pi[$. On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En donner une base.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de θ existe-t-il une suite non nulle de E telle que $u_0 = u_{p+1} = 0$?
3. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ par $a_{i,j} = 1$ si $|i-1| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. La matrice A est-elle diagonalisable? Déterminer les éléments propres de A.