

TD 5 Intégration d'une fonction sur un intervalle

Partie I Révisions - Intégration sur un segment

I.A - Calcul direct d'intégrales et de primitives

Exercice 1 : Calcul les intégrales suivantes.

$$\begin{aligned}
 (i) \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt, & \quad (ii) \int_0^1 t e^{-t^2} dt, & (iii) \int_0^\pi \cos(t) e^{\sin(t)} dt, \\
 (iv) \int_0^{\pi/4} \tan(t) dt, & \quad (v) \int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{e^t+1}} dt, & (vi) \int_0^{1/2} \frac{\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.
 \end{aligned}$$

Exercice 2 - Rationnelles : Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

$$\begin{aligned}
 (i) x \mapsto \frac{1}{x^2-5x+6}, & \quad (ii) x \mapsto \frac{1}{x^2-6x+9}, & (iii) x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+3}, \\
 (iv) x \mapsto \frac{x^3}{x^2-3x+2}, & \quad (v) x \mapsto \frac{x^2}{x^2-4x+5}, & (vi) x \mapsto \frac{1}{x(x+1)(x+2)}.
 \end{aligned}$$

Exercice 3 : Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer l'intégrale

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt.$$

Exercice 4 : On considère un couple non nul $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer une primitive des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = e^{at} \cos(bt) \quad \text{et} \quad g(t) = e^{at} \sin(bt).$$

Exercice 5 : Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t-\lambda}$.

I.B - Intégration par parties

Exercice 6 : Calculer les intégrales suivantes avec des intégrations par parties.

$$\begin{aligned}
 (i) \int_0^1 \ln(1+t^2) dt, & \quad (ii) \int_0^\pi t^2 \cos(2t) dt, & (iii) \int_0^{1/2} \text{Arcsin}(t) dt, \\
 (iv) \int_0^1 (t^2+t+1) e^{2t} dt, & \quad (v) \int_0^1 \text{Arctan}(t) dt, & (vi) \int_0^1 t \text{Arctan}(t) dt.
 \end{aligned}$$

Exercice 7 : Pour tout $(m, n)^2 \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_{m,n} = \int_0^1 t^m (1-t)^n dt.$$

1. Exprimer $I_{m+1,n-1}$ en fonction de $I_{m,n}$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.
2. En déduire une expression explicite de $I_{m,n}$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une primitive de $x \mapsto \ln^n(x)$.

Exercice 9 : Soient $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $r \in \mathbb{N}$. On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Déterminer un développement asymptotique à la précision $o(n^{-r-1})$ de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.C - Changement de variable

Exercice 10 : Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable indiqué.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt \text{ avec } u = \sqrt{t}, & (ii) \quad & \int_1^e \frac{\ln(t)}{t + t \ln^2(t)} dt \text{ avec } u = \ln(t), \\
 (iii) \quad & \int_0^1 \frac{e^{2t}}{1 + e^t} dt \text{ avec } u = e^t, & (iv) \quad & \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1 + \sin^2(t)} \text{ avec } u = \tan(t), \\
 (v) \quad & \int_0^1 \frac{dt}{(1 + t^2)^2} dt \text{ avec } t = \tan(x), & (vi) \quad & \int_{1/2}^2 \frac{\ln(t)}{1 + t^2} dt \text{ avec } u = 1/t.
 \end{aligned}$$

Exercice 11 : En utilisant le changement de variable indiqué, déterminer une primitive des fonctions suivantes.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & t \mapsto \frac{1}{\cos(t)} \text{ avec } u = \sin(t), & (ii) \quad & t \mapsto \frac{1}{\sin(t)} \text{ avec } u = \cos(t), \\
 (iii) \quad & t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \text{ avec } u = e^t, & (iv) \quad & t \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(t)} \text{ avec } u = e^t.
 \end{aligned}$$

I.D - Propriétés générales sur les intégrales

Exercice 12 : Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx.$$

Exercice 13 : On considère les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt.$$

1. Montrer que $I = J$.
2. En déduire la valeur de I et J .

Exercice 14 : Déterminer les limites suivantes.

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{\exp(t)}{t} dt, \quad (ii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} dt.$$

Exercice 15 : Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}.$$

I.E - Sommes de Riemann

Exercice 16 : Déterminer les limites des suites de terme général suivant.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}, & (ii) \quad & \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}, \\
 (iii) \quad & \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}, & (iv) \quad & \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/n}.
 \end{aligned}$$

Exercice 17 : Déterminer un équivalent des suites de terme général suivant.

$$(i) \quad \sum_{k=1}^n \sqrt{k}, \quad (ii) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3}.$$

Exercice 18 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

1. Pour tout réel $x \geq 0$, montrer que $|\sin(x) - x| \leq x^3/6$.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 19 : Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| \neq 1$. Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \ln|x - e^{it}| dt$.

Partie II Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 20 : Étudier la convergence des intégrales suivantes, puis calculer leur valeur en cas de convergence.

$$(i) \int_1^2 \frac{dt}{(t-1)^2}, \quad (ii) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}} dt, \quad (iii) \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt.$$

Exercice 21 : Pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, on considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-at} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at} dt.$$

Montrer que les intégrales I et J sont convergentes et calculer leur valeur.

Exercice 22 : Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p^2 < 4q$. Montrer que l'intégrale ci-dessous est convergente et calculer sa valeur.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + pt + q}.$$

Exercice 23 : Soit $b \in \mathbb{R}$ avec $|b| \neq 1$. Montrer que l'intégrale ci-dessous est convergente et calculer sa valeur.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + (t + ib)^2}.$$

Exercice 24 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Justifier la convergence et calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}.$$

Exercice 25 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier la convergence et calculer l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} (t - [t])e^{-at} dt.$$

Exercice 26 : Montrer que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt$ est convergente et que

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

Exercice 27 - Intégrales de Frullani : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < x < y$. On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt.$$

1. Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \alpha < \beta$, on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt = \int_{\alpha x}^{\alpha y} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{\beta x}^{\beta y} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

2. En déduire que l'intégrale I est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 28 : Étudier la convergence des intégrales ci-dessous.

$$(i) \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt, \quad (ii) \int_0^3 \frac{dt}{(3-t)\sqrt{t}}, \quad (iii) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3} dt, \\ (iv) \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}} dt, \quad (v) \int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}, \quad (vi) \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}} dt.$$

Exercice 29 : Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{t - \sin(t)}{t^a} dt.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que I_a converge.

Exercice 30 - Intégrales de Bertrand : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la convergence de

$$I_{a,b} = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^a \ln(t)^b} \quad \text{et} \quad J_{a,b} = \int_0^{1/e} \frac{dt}{t^a \ln(t)^b}.$$

Exercice 31 : On considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1+t^3}.$$

1. Montrer que les intégrales I et J convergent.
2. Montrer en utilisant le changement de variable $u = 1/t$ que $I = J$.
3. Calculer $I + J$. En déduire la valeur de I .

Exercice 32 : Pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, on considère les intégrales

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)} \quad \text{et} \quad J_a = \int_0^{+\infty} \frac{t^a dt}{(1+t^2)(1+t^a)}.$$

1. Montrer que les intégrales I_a et J_a sont convergentes.
2. En posant $u = 1/t$, montrer que $I_a = J_a$.
3. Calculer $I_a + J_a$. En déduire la valeur de I_a et J_a .

Exercice 33 : On considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt.$$

1. Montrer que l'intégrale I converge si et seulement si l'intégrale J converge.
2. En déduire que l'intégrale I est convergente.
3. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

Exercice 34 : On considère la fonction $f : [\pi, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto \sin(t^2)$.

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_{\pi}^{+\infty} f(t) dt$ converge.
2. Montrer que f n'admet pas de limite en $+\infty$.
3. Commenter les résultats précédents par rapport aux propriétés analogues pour les séries numériques.

Exercice 35 - Intégrales d'Euler : On considère les intégrales

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt.$$

1. Montrer que les intégrales I et J sont convergentes.
2. Montrer que $I = J$.
3. Calculer $I + J$. En déduire la valeur de I et J .

Exercice 36 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 37 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 38 : On considère la fonction d'une variable réelle $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^{-1})$.
3. Montrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.