Mathématiques

PSI

Lycée Couffignal

CHAPITRE 5

Intégration sur un intervalle

Plan du chapitre

Introduction

L'origine de l'intégration remonte à l'antiquité dans les problèmes d'ordre géométrique de calculs d'aires (quadrature), de volumes et de longueurs (rectification) qu'étudiaient les Grecs. Eudoxe invente la méthode d'exhaustion au IVᵉ siècle avant notre ère qui consiste à établir des encadrements successifs de l'aire d'une surface par deux quantités dont la différence s'épuise. Par ce procédé, Archimède a notamment déterminé un encadrement de π donnant ses deux premières décimales et il a calculé l'aire de la surface comprise entre une parabole et une de ses cordes.

Au cours du Xᵉ siècle, les Arabes déterminent l'aire d'une surface délimitée par la courbe de la fonction $x \longmapsto x^4$ en se basant sur les travaux d'Archimède. Ce n'est que dans la première moitié du XVIIᵉ siècle que Fermat calcule l'aire d'une surface comprise entre l'axe des abscisses, une parallèle à l'axe des ordonnées et la courbe de la fonction $x \longmapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$. À la même époque, le mathématicien italien Cavalieri invente un nouveau procédé de calcul d'aire : la méthode des indivisibles. L'intégration était une affaire de géomètre jusque là.

Dans la seconde moitié du XVIIᵉ siècle, Newton et Leibniz fondèrent le calcul infinitésimal qui se compose de deux branches : le calcul différentiel et le calcul intégral. Ils développent la notion de différentielle et ils établissent le lien entre dérivation et intégration. La notation $\int$ est utilisée pour la première fois par Leibniz : un grand S pour la première lettre de *summa*, somme en latin.

Il subsiste néanmoins des failles dans la théorie de Leibniz qui manque de rigueur, principalement à cause de la mauvaise compréhension des notions de nombre et de fonction à cette époque. La théorie ne précise pas par exemple quelles sont les fonctions que l'on peut intégrer avec la construction de Leibniz. Cauchy est le premier à donner une définition rigoureuse de l'intégrale d'une fonction continue dans son *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* publié en 1823. Sa construction s'appuie sur ce que l'on appelle actuellement une somme de Riemann et c'est celle qui est enseignée en classe préparatoire de nos jours. En 1854, Riemann présente un travail intitulé *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* pour sa thèse d'habilitation à l'Université de Göttingen dans lequel il étend la théorie d'intégration de Cauchy à une plus grande classe de fonctions. L'intégrale de Riemann est la première théorie d'intégration satisfaisante.

Elle présente néanmoins un inconvénient : une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann peut converger simplement vers une fonction qui n'est pas intégrable au sens de Riemann. C'est pour pallier cette difficulté que Lebesgue présente en 1902 dans sa thèse intitulée *Intégrale, longueur, aire* une nouvelle théorie de l'intégration qui porte aujourd'hui son nom. Par la suite, d'autres intégrales sont construites. L'intégration est encore un sujet pour la recherche contemporaine.

L'intégration est essentielle dans les différentes disciplines scientifiques. Elle permet par exemple de définir la transformation de Laplace et la transformation de Fourier qui sont des notions importantes en physique et en science de l'ingénieur. L'intégration joue également un rôle central en probabilité et en statistique.

Nous aurons deux objectifs principaux dans ce chapitre. Dans un premier temps, nous étendrons la théorie de l'intégration vue en première année à une classe plus large de fonctions. Dans un second temps, nous développerons la notion d'intégrale d'une fonction sur un intervalle qui n'est pas nécessairement un segment. Une nouvelle difficulté apparaît : l'aire sous la courbe de la fonction n'est plus nécessairement finie, ce qui nous amènera à introduire la notion d'intégrale convergente.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Fonctions continues par morceaux

Dans cette partie, on considère un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$.

I.A - Généralités

Définition (Subdivision du segment $[a,b]$) : Une subdivision du segment $[a,b]$ en $n+1$ points avec $n \in \mathbb{N}^*$ est un $(n+1)$-uplet $\sigma = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$a = x_0 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b.$$

Remarques 1 :

a) Se donner une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ d'un segment $[a,b]$ en $n+1$ points revient à se donner un découpage de $[a,b]$ avec les n segments $[x_k, x_{k+1}]$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

b) On dit qu'une subdivision σ_1 de $[a,b]$ est plus fine qu'une subdivision σ_2 de $[a,b]$ si chaque composante de σ_2 est aussi une composante de σ_1.

c) Une part importante des résultats de cette partie repose sur le lemme élémentaire suivant : si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions de $[a,b]$, alors il existe une subdivision σ de $[a,b]$ plus fine que σ_1 et que σ_2.

Définition (Fonction continue par morceaux sur un segment) : Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ de $[a,b]$ telle que

(i) pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction f est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$;

(ii) pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction f admet une limite finie en x_k^+ et une limite finie en x_{k+1}^-.

On dit que σ est une subdivision adaptée à f.

Remarques 2 :

a) Une fonction continue par morceaux sur un segment a un nombre fini de points de discontinuité.

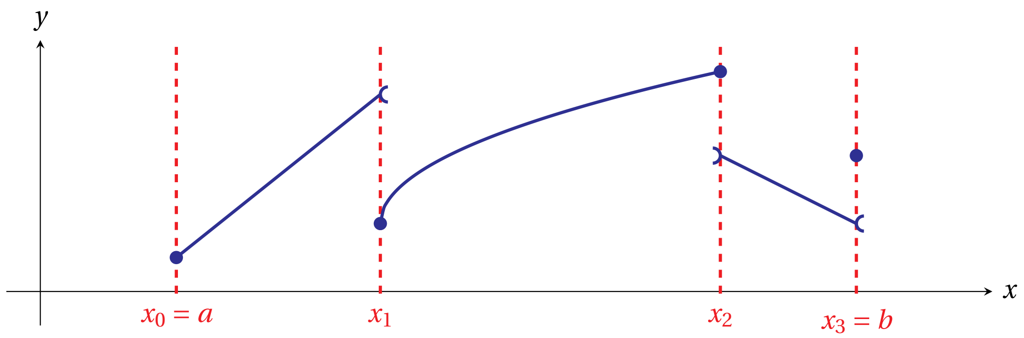
b) Si $\sigma = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est une subdivision adaptée à une fonction continue par morceaux f sur $[a,b]$, alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ se prolonge par continuité au segment $[x_k, x_{k+1}]$.

c) On déduit de la remarque précédente et du théorème des bornes atteintes qu'une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

d) Si σ_1 est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à une fonction continue par morceaux $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ et que σ_2 est une subdivision de $[a,b]$ plus fine que σ_1, alors σ_2 est aussi une subdivision adaptée à f.

e) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, alors f est continue par morceaux sur $[a,b]$ et $\sigma = (a,b)$ est une subdivision adaptée à f.

Illustration : Sur le graphique ci-dessous, il est tracé la courbe représentative d'une fonction f continue par morceaux et une subdivision adaptée à f.



Exemples 1 :

a) La fonction partie entière $f : t \mapsto \lfloor t \rfloor$ est continue par morceaux sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

b) La fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(t) = t^{-1}$ pour tout $t \in]0, 1]$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$, car elle n'est pas bornée.

Définition (Fonction continue par morceaux sur un intervalle) : Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.

Exemple 2 : La fonction partie entière $f : t \mapsto \lfloor t \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Notation : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque 3 : Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur un intervalle I est aussi continue par morceaux sur I. Autrement dit, on a l'inclusion $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{K}) \subset \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}(I, \mathbb{K})$.

Proposition 1 : Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonction $f + \lambda g$ et fg sont continues par morceaux sur I.

(ii) Si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue par morceaux sur I.

(iii) La fonction $|f|$ est continue par morceaux sur I.

Remarque 4 : On en déduit que $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.

ATTENTION : La composée de deux fonctions continues par morceaux n'est pas nécessairement continue par morceaux.

I.B - Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, nous allons nous ramener à intégrer plusieurs fonctions continues de manière à pouvoir utiliser la théorie étudiée en première année.

Rappelons que si $\sigma = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est une subdivision adaptée à une fonction continue par morceaux f sur le segment $[a, b]$, alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ se prolonge par continuité au segment $[x_k, x_{k+1}]$ en une fonction continue que l'on notera $f_{\sigma,k}$.

Lemme 1 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Le nombre

$$I_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_{\sigma,k}(t) \, \mathrm{d}t$$

ne dépend pas du choix de la subdivision σ de $[a, b]$ adaptée à f.

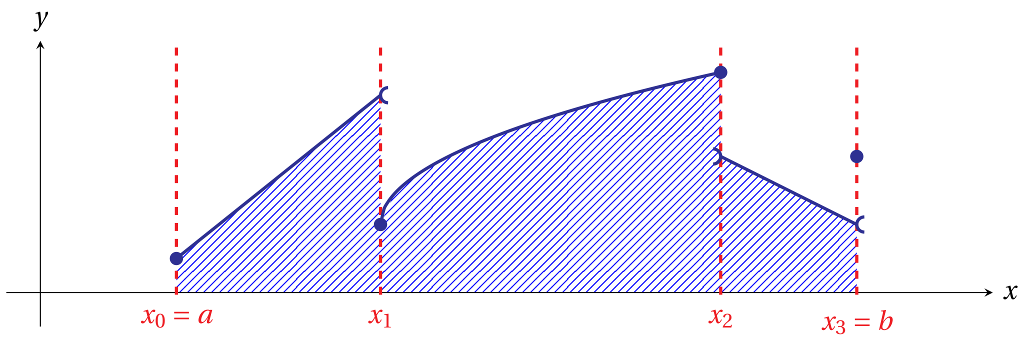
Définition (Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment) : Si $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme le nombre

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_{\sigma,k}(t) \, \mathrm{d}t$$

où $\sigma = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.

Remarque 5 : La définition précédente étend celle vue en première pour l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, i.e. si $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est une fonction continue, la définition ci-dessus et celle vue en première année donne la même valeur pour l'intégrale de f sur $[a, b]$.

Illustration : L'intégrale de la fonction continue par morceaux tracée dans l'illustration précédente est l'aire algébrique de la partie hachurée ci-dessous.



Exemple 3 : On a $\displaystyle\int_0^2 \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t + \int_1^2 \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t = \int_0^1 0 \,\mathrm{d}t + \int_1^2 1 \,\mathrm{d}t = 1.$

Proposition (Relation de Chasles) : Si $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, alors pour tout élément $c \in [a, b]$, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Notation : On utilisera encore la convention $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ dans ce cadre plus général.

Proposition (Linéarité de l'intégrale) : Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $f, g : [a, b] \to \mathbb{K}$ sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition (Croissance et positivité de l'intégrale) : Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

(i) Positivité de l'intégrale : si f est positive sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

(ii) Croissance de l'intégrale : si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

ATTENTION : On peut démontrer qu'étant donné une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ positive et continue par morceaux sur $[a, b]$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est nulle si et seulement si l'ensemble $\{x \in [a, b] \mid f(x) \neq 0\}$ est fini. Par exemple, la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1, \end{cases}$$

est positive et continue par morceaux sur $[0, 1]$, mais elle n'est pas nulle et on a $\displaystyle\int_0^1 f(t) = 0$.

Partie II Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

II.A - Convergence d'une intégrale

Nous allons distinguer trois cas pour définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux $f : I \to \mathbb{K}$ sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un segment (ce cas étant déjà traité dans la première partie de ce chapitre) :

$$\text{(i) } I = [a,b[, \qquad \text{(ii) } I =]a,b], \qquad \text{(iii) } I =]a,b[.$$

Définition (Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$) : Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a,+\infty]$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si la fonction $\beta \mapsto \int_a^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $\beta \to b^-$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

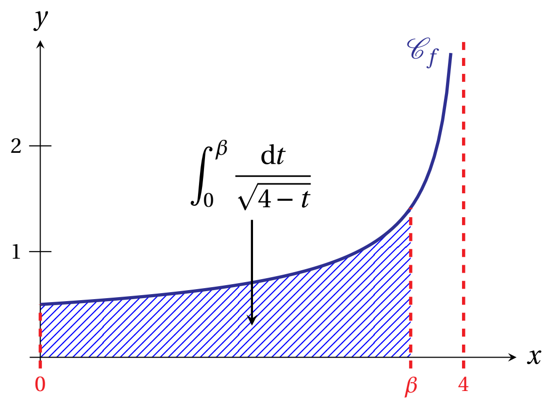
Remarque 6 : On dit aussi que l'intégrale est convergente (respectivement divergente) en b.

Exemples 4 :

a) Soit $f : [0,4[\to \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-t}}$.
La fonction f est continue par morceaux sur $[0,4[$. Pour tout $\beta \in [0,4[$, on a

$$\int_0^\beta \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t}} = \left[-2\sqrt{4-t}\right]_0^\beta \xrightarrow[\beta \to 4^-]{} 4.$$

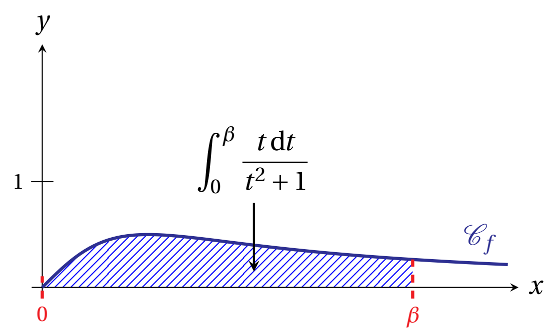
On en déduit que l'intégrale $\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et que sa valeur est 4.



b) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto \dfrac{t}{t^2+1}$.
La fonction f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. Pour tout $\beta \in [0,+\infty[$, on a

$$\int_0^\beta \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \left[\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)\right]_0^\beta \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} +\infty,$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.



Exercice 1 : Étudier la convergence des intégrales suivantes, puis calculer leur valeur en cas de convergence.

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}, \qquad (ii) \int_0^{\pi/2} \tan(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (iii) \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}.$$

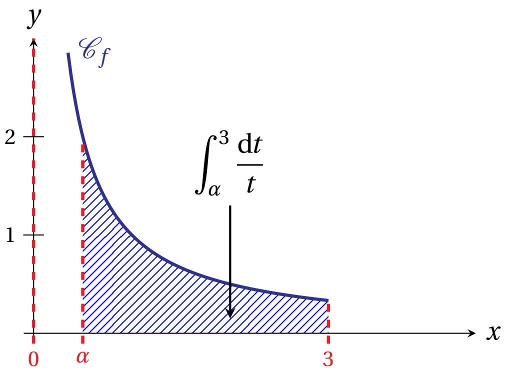
Définition (Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $]a,b]$) : Soit $f :]a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b]$ avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \in [-\infty, b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si la fonction $\alpha \mapsto \int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $\alpha \to a^+$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Remarque 7 : On dit aussi que l'intégrale est convergente (respectivement divergente) en a.

Exemple 5 : Soit $f :]0,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto \frac{1}{t}$. La fonction f est continue par morceaux sur $]0,3]$.



Pour tout $\alpha \in]0,3]$, on a

$$\int_\alpha^3 \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln(t)]_\alpha^3 \xrightarrow[\alpha \to 0^+]{} +\infty,$$

donc l'intégrale $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Exercice 2 : Étudier la convergence des intégrales suivantes, puis calculer leur valeur en cas de convergence.

$$(i) \int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (ii) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad (iii) \int_{-\infty}^0 t e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Définition (Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$) : Soit $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente s'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que les deux intégrales

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

sont convergentes. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

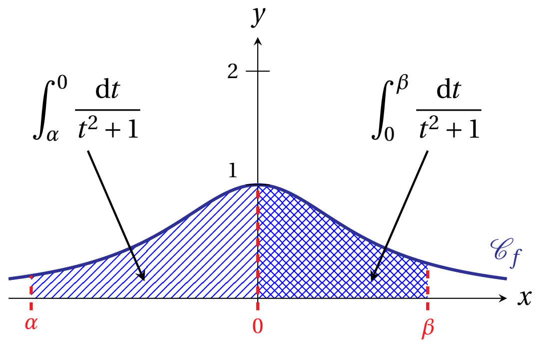
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Remarques 8 :

a) La convergence ou la divergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du choix du point $c \in]a,b[$.

b) Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, sa valeur ne dépend pas du choix du point $c \in]a,b[$.

Exemple 6 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f: t\mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$. La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.



Pour tout $\alpha<0<\beta$, on a

$$\int_0^\beta \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \left[\operatorname{Arctan}(t)\right]_0^\beta \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_\alpha^0 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \left[\operatorname{Arctan}(t)\right]_\alpha^0 \xrightarrow[\alpha\to-\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente par définition et sa valeur est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Exercice 3 : Étudier la convergence des intégrales suivantes, puis calculer leur valeur en cas de convergence.

$$(i)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3}{t^4+1}\,\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \qquad (iii)\ \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

ATTENTION : Il ne faut pas confondre l'objet intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ qui pourra être convergente ou divergente et le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ qui n'existe que si l'intégrale converge. Il n'y a malheureusement pas de notation différente contrairement au cas des séries numériques avec $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: c'est le contexte qui décidera.

II.B - Intégrales de référence

Proposition 2 : Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\lambda>0$.

Proposition 3 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Définition (Intégrale de Riemann) : On appelle intégrale de Riemann toute intégrale de la forme $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ou de la forme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$.

Proposition (Convergence d'une intégrale de Riemann) : Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

(i) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha>1$.

(ii) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha<1$.

II.C - Propriétés générales des intégrales

On fixe un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Proposition (Relation de Chasles) : Soit $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$ et $c \in]a,b[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes. Dans ce cas, on a la relation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Notation : Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente avec $a \leqslant b$, on notera encore $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition (Linéarité de l'intégrale) : Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $f,g :]a,b[\to \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux sur $]a,b[$. Si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est convergente et on a la relation

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 9 : On en déduit que si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale divergente, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \big(f(t) + g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Proposition (Croissance et positivité de l'intégrale) : Soient $f,g :]a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur $]a,b[$.

(i) Positivité de l'intégrale : si f est positive sur $]a,b[$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

(ii) Croissance de l'intégrale : si $f \leqslant g$ sur $]a,b[$ et si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors on a l'inégalité $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

II.D - Changement de variable

On fixe un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Théorème du changement de variable : Soit $\varphi :]c,d[\to]a,b[$ une bijection croissante de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]c,d[$. Si $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue sur $]a,b[$, alors les intégrales

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

sont de même nature. De plus, si les intégrales convergent, alors on a la relation

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarques 10 :

a) Si $\varphi :]c,d[\to]a,b[$ est une bijection décroissante de classe $\mathscr{C}^1$, on a le résultat analogue avec les intégrales

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Il faut s'assurer que les intégrales sont convergentes dans le théorème ci-dessus pour écrire une égalité.

c) En pratique, le changement de variable s'effectue comme pour une intégrale sur un segment.

d) La continuité de la fonction f sur $]a,b[$ assure que la fonction $f \circ \varphi$ est continue sur $]c,d[$.

Exemple 7 : On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \sin(t)$ est une bijection croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,\pi/2[$ sur $]0,1[$. En effectuant le changement de variable $x = \sin(t)$ dans l'intégrale I, on obtient l'intégrale

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme la fonction $t \mapsto \sin^2(t)$ est continue sur $[0,\pi/2]$, l'intégrale J est convergente. On en déduit par le théorème du changement de variable que l'intégrale I est convergente et que

$$I = J = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 4 : En utilisant le changement de variable $u = \mathrm{e}^t + 1$, montrer que l'intégrale ci-dessous est convergente, puis calculer sa valeur.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}.$$

Exercice 5 : Montrer que l'intégrale ci-dessous est convergente en utilisant le changement de variable $u = \pi - t$.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{(\pi-t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

II.E - Intégration par parties

Théorème d'intégration par parties : Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$. Si les deux limites

$$\lim_{t\to a^+} f(t)g(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to b^-} f(t)g(t)$$

existent et sont finies, alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. De plus, si les intégrales convergent, alors on a la relation

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \left[f(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

où $\left[f(t)g(t)\right]_a^b = \left(\lim_{t\to b^-} f(t)g(t)\right) - \left(\lim_{t\to a^+} f(t)g(t)\right)$.

Remarques 11 :

a) Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b[$, il suffit de vérifier que la limite de fg en b^- existe et est finie.

b) Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b]$, il suffit de vérifier que la limite de fg en a^+ existe et est finie.

Exemple 8 : On considère l'intégrale $I = \int_0^1 2t\ln(t)\,\mathrm{d}t$. Les fonctions $f : t \mapsto \ln(t)$ et $g : t \mapsto t^2$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0, 1]$ et on a par croissance comparée que

$$\lim_{t\to 0^+} f(t)g(t) = 0.$$

On en déduit que les intégrales

$$I = \int_0^1 f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2t\ln(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Comme l'intégrale J est convergente, on en déduit que I converge et que

$$\int_0^1 2t\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[t^2\ln(t)\right]_0^1 - \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = (0-0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 6 : En utilisant une intégration par parties, montrer que l'intégrale I ci-dessous est convergente et calculer sa valeur.

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Partie III Intégrales de fonctions positives

On fixe un intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$ avec $a < b \leqslant +\infty$.

III.A - Généralités

Lemme fondamental : Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et positive sur $[a, b[$.

(i) La fonction $\beta \mapsto \displaystyle\int_a^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante sur $[a, b[$.

(ii) L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si la fonction $\beta \mapsto \displaystyle\int_a^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.

Remarque 12 : Le lemme ci-dessus s'adapte naturellement à des intégrales de fonctions continues par morceaux et positives sur l'intervalle $]a, b]$.

Exercice 7 : Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

III.B - Règles de comparaisons

Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ et $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions, on rappelle que l'on dit que la fonction f est dominée par la fonction g au voisinage de b^-, ce que l'on note $f(t) \underset{b^-}{=} O\big(g(t)\big)$, si

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x \text{ dans un voisinage de } b^-, \quad |f(x)| \leqslant K|g(x)|.$$

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de b^-, la définition ci-dessus est équivalente à dire que le quotient f/g est une fonction bornée au voisinage de b^-.

Théorème de comparaison : Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux et positives sur l'intervalle $[a, b[$.

(i) Si $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a, b[$, alors la convergence de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ implique celle de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

(ii) Si $f(t) \underset{b^-}{=} O\big(g(t)\big)$, alors la convergence de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ implique celle de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

(iii) Si $f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t)$, alors la convergence de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ équivaut à celle de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarques 13 :

a) Sous l'hypothèse du (i), on a en plus l'inégalité $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Sous l'hypothèse du (i) ou du (ii), on a par contraposition que la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ implique celle de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

c) L'assertion (i) reste valable si l'inégalité $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ n'est que vérifiée au voisinage de b^-.

d) L'assertion (ii) reste valable si on remplace $f(t) \underset{b^-}{=} O\big(g(t)\big)$ par $f(t) \underset{b^-}{=} o\big(g(t)\big)$.

e) Le théorème ci-dessus s'adapte naturellement à des intégrales de fonctions continues par morceaux et positives sur l'intervalle $]a, b]$.

Exemples 9 :

a) On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est continue par morceaux et positive sur $[1, +\infty[$. De plus, on a l'inégalité

$$\forall t \in [1, +\infty[, \qquad 0 \leqslant \frac{\sin^2(t)}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, on conclut que I converge par comparaison.

b) On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^3}$ est continue par morceaux et positive sur $[1, +\infty[$. Par croissance comparée, on a

$$\lim_{t\to+\infty} t^2\left(\frac{\ln(t)}{t^3}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(t)}{t^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc I converge par comparaison.

c) On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$. De plus, on a l'équivalent

$$\frac{\sin(t)}{t} \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{t} \underset{0^+}{\sim} 1 \geqslant 0$$

et comme $\displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente, on conclut que I converge par comparaison.

Exercice 8 : Étudier la convergence des intégrales ci-dessous.

$$(i)\ \int_1^{+\infty} \frac{(t-1)(t-5)}{t^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}, \qquad (iii)\ \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$(iv)\ \int_0^{+\infty} \frac{2+\cos(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \qquad (v)\ \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad (vi)\ \int_0^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Partie IV Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

On considère un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ et l'on note $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$. En particulier, l'intervalle I est nécessairement de la forme $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$.

Définition (Intégrale absolument convergente) : Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur I. On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Définition (Fonction intégrable) : Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite intégrable sur l'intervalle I si f est continue par morceaux sur I et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Remarques 14 :

a) Si $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ est intégrable sur $[a,b[$, on dit que f est intégrable en b.

b) Si $f :]a,b] \to \mathbb{K}$ est intégrable sur $]a,b]$, on dit que f est intégrable en a.

Exemples 10 :

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda t}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\lambda > 0$.

b) La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0^+.

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

d) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha < 1$.

Théorème 1 : Si une intégrale converge absolument, alors elle converge.

Exemple 11 : On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$. De plus, on a l'inégalité

$$\forall t \in [1,+\infty[, \qquad 0 \leqslant \left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, on obtient que l'intégrale I est absolument convergente par comparaison. On conclut par le théorème précédent que l'intégrale I est convergente.

ATTENTION : La réciproque du théorème est fausse. On peut par exemple vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, mais qu'elle ne converge pas absolument.

Notation : Si $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue et intégrable sur I, alors on note

$$\int_I f = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition (Inégalité triangulaire) : Si $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction intégrable, alors on a l'inégalité

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Notation : On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition 4 : L'ensemble $L^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$.

Proposition 5 : Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue, positive, intégrable sur I et vérifie $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est nulle.

ATTENTION : Cette proposition devient fausse si on remplace l'hypothèse « continue » par « continue par morceaux ».

Remarque 15 : On déduit de la proposition précédente que l'application $N : f \mapsto \displaystyle\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est une norme sur l'espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K}) \cap \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$.

Exercice 9 : Étudier la convergence des intégrales ci-dessous.

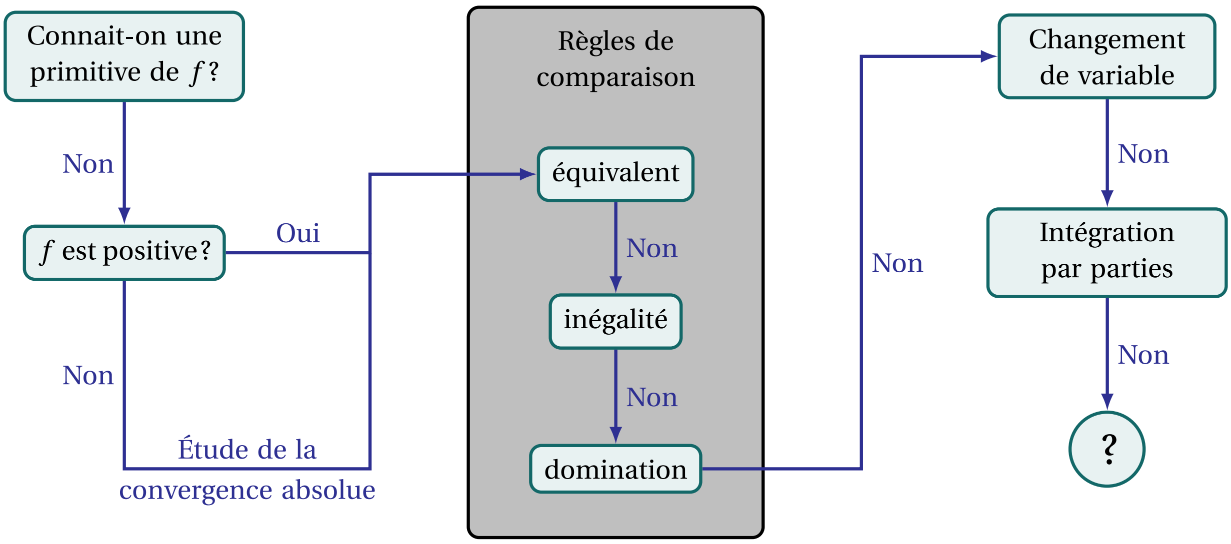
$$(i)\ \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t, \qquad (iii)\ \int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t.$$

Partie V Méthode - Étudier la convergence d'une intégrale

On souhaite étudier le convergence d'une intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction définie sur un des intervalles

$$\text{(i) } I=[a,b], \qquad \text{(ii) } I=[a,b[, \qquad \text{(iii) } I=]a,b], \qquad \text{(iv) } I=]a,b[.$$

1) On détermine si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$.
2) On distingue trois cas.
   a) Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ l'intégrale est convergente.
   b) Si f n'est que continue par morceaux sur $]a,b[$, on sépare l'intégrale en deux pour se ramener au cas où seul une des deux extrémités de l'intervalle d'intégration est ouverte.
3) On s'est donc ramené à étudier la convergence de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux f sur l'intervalle $[a,b[$ ou l'intervalle $]a,b]$. Le graphe ci-dessous résume la démarche à suivre pour étudier cette intégrale.



Si la fonction f n'est pas positive et que l'on a démontré qu'elle ne converge pas absolument, on sort du cadre du programme dans le cas général.

4) Dans le cas où on avait séparé l'intégrale de départ en deux, on conclut (Par définition, l'intégrale converge si chacune des deux intégrales obtenues après la séparation convergent).