CHAPITRE 12

Intégrales dépendant d'un paramètre

Jérôme Von Buhren
http://vonbuhren.free.fr

Lycée Couffignal - PSI*

Dans ce chapitre, nous allons étudier les intégrales à paramètre, i.e. les intégrales de la forme

$$\forall p \in A, \quad I(p) = \int_I f(p,t)\,\mathrm{d}t.$$

où $f : A \times I \to \mathbb{K}$ où A est une partie de $\mathbb{R}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (le paramètre étant la variable p).

Si $A = [\![n_0, +\infty [\![$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$, l'intégrale à paramètre ci-dessus se réécrit sous la forme d'une suite $(I_n)_{n \geqslant n_0}$ où

$$\forall n \in A, \quad I_n = \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad f_n : t \mapsto f(n,t).$$

Dans ce contexte, nous donnerons des conditions suffisantes pour que les relations

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_I \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

aient un sens et soient vérifiées.

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, nous donnerons les conditions suffisantes pour que certaines propriétés classiques (continuité, dérivabilité, etc.) admises par les fonctions $x \mapsto f(x,t)$ pour $t \in I$ se transfèrent à la fonction

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans tout le chapitre, on considère un intervalle I contenant au moins deux points et on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Si on considère la fonction $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^{-1} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad x > n, \end{cases}$$

alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle f sur $[0,+\infty[$, mais on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ vers f sur l'intervalle I n'est pas suffisante pour que l'on puisse permuter une limite et une intégrale en général. Nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires.

Théorème de convergence dominée

Si $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) la suite $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I ;

(ii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (n,t) \in [\![n_0, +\infty [\![\times I, \quad \left| f_n(t) \right| \leqslant \varphi(t) \,; \qquad \text{(Hypothèse de domination)}$$

alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$ et on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration

HORS PROGRAMME

Remarques 1

a) La continuité par morceaux des différentes fonctions assure que les intégrales en jeu puissent avoir un sens, l'hypothèse (i) est dictée par la propriété que l'on souhaite conserver après intégration et l'hypothèse (ii) impose une condition « technique » pour assurer que l'on puisse permuter limite et intégrale.

b) La fonction φ ne doit pas dépendre de la variable n.

c) Nous avions déjà étudié le théorème d'intégration pour une suite de fonctions convergeant uniformément dans un chapitre précédent : rappelons que ce dernier ne s'applique que sur un segment.

d) Ces deux théorèmes sont complémentaires : en fonction des situations, il faut appliquer l'un ou l'autre pour obtenir le résultat.

Exemple 1

Étudions la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{où} \quad f_n : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^t + t^n}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $[0,+\infty[$ vérifiant les hypothèses suivantes.

(i) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction continue par morceaux

$$f : t \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ (\mathrm{e}+1)^{-1} & \text{si} \quad t = 1 \\ 0 & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

Exemple 1

(ii) On a la majoration

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times I, \quad \left| f_n(t) \right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par le théorème de convergence dominée, on conclut que f_n et f sont intégrables sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-1}.$$

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

1) Montrer que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in\,]-1, +\infty[$.
2) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Le théorème ci-dessous permet d'intervertir une intégrale et une somme comportant une infinité de termes sous certaines conditions.

Théorème d'intégration terme à terme

Si $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ est une série de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) la série $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur I ;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est intégrable sur I ;

(iii) la série numérique $\sum_{n\geqslant n_0} \int_I \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t$ converge ;

alors la fonction $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et on a

$$\int_I \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\, \mathrm{d}t \right).$$

DÉMONSTRATION

HORS PROGRAMME

Remarques 2

a) La continuité par morceaux des différentes fonctions et l'hypothèse (ii) assurent que les intégrales en jeu puissent avoir un sens, l'hypothèse (i) assure la convergence de la série de fonctions et l'hypothèse (iii) impose une condition « technique » pour assurer que l'on puisse permuter somme et intégrale.

b) Nous avions déjà étudié le théorème d'intégration pour une série de fonctions convergeant uniformément dans un chapitre précédent : rappelons que ce dernier ne s'applique que sur un segment.

c) Ces deux théorèmes sont complémentaires : en fonction des situations, il faut appliquer l'un ou l'autre pour obtenir le résultat.

Exemple 2

Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(i) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$ est continue par morceaux sur l'intervalle $]0,+\infty[$. De plus, comme $e^{-t} \in]0,1[$ pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a via la série géométrique que

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad f(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = t\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{te^{-nt}}_{f_n(t)}.$$

Exemple 2

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, puis en utilisant une intégration par parties, on vérifie que f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et qu'on a

$$\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

(iii) La série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t$ est une série de Riemann convergente.

On conclut par le théorème d'intégration terme à terme que la fonction f est intégrable et qu'on a

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 2

Montrer qu'on a la relation $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Remarque 3

Dans certaine situation, les hypothèses du théorème d'intégration ne sont pas vérifiées, mais on peut néanmoins aboutir à la conclusion en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ de la série de fonctions.

Exemple 3

Montrons que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

On commence par remarquer qu'on a

$$\forall t \in [0,1[,\quad \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n t^n}_{f_n(t)}.$$

En particulier, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^1 \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t = \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1},$$

donc la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t$ est divergente : le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas dans ce cas.

Exemple 3

Montrons que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

On commence par remarquer qu'on a

$$\forall t \in [0,1[, \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n t^n}_{f_n(t)}.$$

De plus, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas en $t=1$, donc on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration pour une série de fonctions convergeant uniformément.

Exemple 3

Nous allons appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$.

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $[0,1[$ vérifiant les hypothèses suivantes.

(i) La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction continue par morceaux $f : t \mapsto (1+t)^{-1}$.

(ii) Pour tout $(n,t)\in\mathbb{N}\times[0,1[$, on a la majoration

$$|S_n(t)| = \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} (-t)^k\right| = \left|\frac{1+(-t)^{n+1}}{1+t}\right| \leqslant \frac{2}{1+t}$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto 2(1+t)^{-1}$ est intégrable sur $[0,1[$.

Exemple 3

Par le théorème de convergence dominée, on conclut que S_n et f sont intégrables sur $[0,+\infty[$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t)\right)\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}.
\end{aligned}$$

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$.

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$.

On souhaite montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème d'intégration pour une suite de fonctions convergeant uniformément

L'intervalle I est un segment $I=[a,b]$.

(i) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant n_0$, la fonction f_n est continue sur I ;

(ii) la suite $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ converge uniformément sur I.

Théorème de convergence dominée

L'intervalle I est quelconque et f_n est continue par morceaux sur I pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant n_0$.

(i) La suite $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur I ;

(ii) il existe $\varphi : I\to\mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (n,t)\in [\![n_0,+\infty [\![\times I,\quad \left|f_n(t)\right|\leqslant \varphi(t).$$

On souhaite montrer que :

$$\int_I \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

Théorème d'intégration pour une série de fonctions convergeant uniformément

L'intervalle I est un segment $I = [a, b]$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est continue sur I ;

(ii) la série $\sum_{n \geqslant n_0} f_n$ converge uniformément sur I.

Théorème de convergence dominée appliquée à la suite des sommes partielles

L'intervalle I est quelconque et S_n est continue par morceaux sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$.

(i) La suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur I ;

(ii) il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (n, t) \in [\![n_0, +\infty [\![\times I, \quad |S_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

Théorème d'intégration terme à terme

L'intervalle I est quelconque et f_n est continue par morceaux sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$.

(i) La série $\sum_{n \geqslant n_0} f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur I ;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est intégrable sur I ;

(iii) la série numérique $\sum_{n \geqslant n_0} \int_I \left| f_n(t) \right| \mathrm{d}t$ converge.

On rappelle que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geqslant n_0} f_n$ est définie pour tout $n \in [\![n_0, +\infty [\![$ par :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f_k.$$

Remarquons que même dans des cas simples, la continuité de la fonction g de l'introduction n'est pas assurée. Par exemple, si on considère $f:(x,t)\mapsto x\mathrm{e}^{-xt}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^2$, alors la fonction $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par

$$g:x\mapsto\int_0^{+\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x=0\\ 1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$. Nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires.

Théorème de continuité pour une intégrale à paramètre

Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A;

(ii) pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I;

(iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad \left|f(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \; ; \qquad \text{(Hypothèse de domination)}$$

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur l'intervalle A.

Remarques 4

a) L'hypothèse (i) est dictée par la propriété que l'on souhaite conserver après intégration, l'hypothèse (ii) assure que l'intégrale définissant g puisse avoir un sens et l'hypothèse (iii) impose une condition « technique » pour assurer l'existence et la continuité de g.

b) La fonction φ dans l'hypothèse (iii) ne doit pas dépendre de la variable x.

Exemple 4

Montrons que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x,t) \mapsto \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ vérifie les hypothèses suivantes.

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

(iii) On a la majoration

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad \left|f(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}.$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On conclut que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ par le théorème de continuité.

Exercice 4

On considère la fonction d'une variable réelle

$$g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(xt)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque 5

Si l'hypothèse de domination n'est pas vérifiée pour tout $x \in A$, on peut parfois s'en sortir en appliquant le théorème sur un segment arbitraire $[a, b]$ de A. Si l'hypothèse de domination est vérifiée sur le segment $[a, b]$, alors on en déduit par le théorème que g est continue sur $[a, b]$. Comme $[a, b]$ est un segment arbitraire de A et que la continuité est une propriété locale, on conclut que g est continue sur A.

Exemple 5

Montrons que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ vérifie les hypothèses suivantes.

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 5

(iii) L'hypothèse de domination n'est pas vérifiée sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$. En effet, s'il existait une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad \left|\frac{e^{-t}}{x+t}\right| \leqslant \varphi(t),$$

alors en prenant la limite lorsque $x \to 0^+$, on obtient que φ n'est pas intégrale en 0^+ car

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) \geqslant \left|\frac{e^{-t}}{t}\right| \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t}.$$

Exemple 5

(iii) Par contre, si on considère un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, alors on a la majoration

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+, \quad \left| \frac{e^{-t}}{x+t} \right| \leqslant \frac{e^{-t}}{a+t}.$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{a+t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On conclut par le théorème de continuité que la fonction g est continue sur $[a, b]$. Comme $[a, b]$ est un segment arbitraire de $\mathbb{R}_+^*$ et que la continuité est une propriété locale, on conclut que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5

On considère la fonction d'une variable réelle

$$g : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) Montrer que $g(x) + g(x+1) = 1/x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4) Déterminer un équivalent de g en 0^+ et la limite de g en $+\infty$.
5) Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ qu'on a

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

Théorème de convergence dominée à paramètre continu

Soit a une extrémité d'un l'intervalle A de $\mathbb{R}$. Si $f : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ admet une limite $\ell(t)$ lorsque $x \to a$;

(ii) pour tout $x \in A$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I;

(iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad \left| f(x,t) \right| \leqslant \varphi(t) \; ; \qquad \text{(Hypothèse de domination)}$$

alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie sur l'intervalle A, la fonction ℓ est intégrable sur I et on a

$$g(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques 6

a) L'hypothèse (i) est dictée par la propriété que l'on souhaite conserver après intégration, l'hypothèse (ii) assure que les intégrales dans la conclusion puissent avoir un sens et l'hypothèse (iii) impose une condition « technique » pour assurer l'existence des intégrales en jeu et l'existence de la limite de l'intégrale.

b) La fonction φ dans l'hypothèse (iii) ne doit pas dépendre de la variable x.

c) Le théorème ci-dessus est une extension du théorème sur les suites de fonctions vu dans la première partie.

Exemple 6

Étudions la limite en $+\infty$ de la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$.

La fonction $f : [1,+\infty[\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ vérifie les hypothèses suivantes.

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ admet $\ell(t) = 0$ pour limite lorsque $x \to +\infty$.

(ii) Pour tout $x \in [1,+\infty[$, les fonctions $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 6

(iii) On a la majoration

$$\forall (x,t) \in [1,+\infty[\times\mathbb{R}_+, \quad \left|f(x,t)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On conclut par le théorème de convergence dominée à paramètre continu que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite en $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} \ell(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 6

On considère la fonction d'une variable réelle

$$g : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(xt)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction g admet une limite en $+\infty$ et préciser cette limite.

Théorème de dérivabilité pour une intégrale à paramètre

Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A;

(ii) pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I;

(iii) pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I;

(iv) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)\,; \qquad \text{(Hypothèse de domination)}$$

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle A. De plus, on a

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques 7

a) L'hypothèse (i) est dictée par la propriété que l'on souhaite conserver après intégration, l'hypothèse (ii) assure l'existence de g, l'hypothèse (iii) assure que l'intégrale sur I de $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ puisse avoir un sens et l'hypothèse (iv) impose une condition « technique » pour assurer que g est $\mathscr{C}^1$ et l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

b) La fonction φ dans l'hypothèse (iv) ne doit pas dépendre de la variable x.

Exemple 7

Montrons que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{itx}$ vérifie les hypothèses suivantes.

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left| \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \right| \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{e}^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

donc la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 7

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

(iv) On a la majoration

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2}$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On conclut que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par le théorème de dérivabilité. De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{i}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7

On considère la fonction d'une variable réelle

$$g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(tx)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3) En déduire que l'on a la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2/4}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 8

Si l'hypothèse de domination n'est pas vérifiée pour tout $x \in A$, on peut parfois s'en sortir en appliquant le théorème sur un segment arbitraire $[a, b]$ de A. Si l'hypothèse de domination est vérifiée sur le segment $[a, b]$, alors on en déduit par le théorème que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Comme $[a, b]$ est un segment arbitraire de A et que « être de classe $\mathscr{C}^1$ » est une propriété locale, on conclut que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A.

Exemple 8

Montrons que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ vérifie les hypothèses suivantes.

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a

$$\left|\frac{e^{-t}}{x+t}\right| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

donc la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 8

(iv) Pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a la majoration

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leqslant \frac{e^{-t}}{(a+t)^2}.$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{(a+t)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On conclut par le théorème de dérivabilité que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Comme $[a, b]$ est un segment arbitraire de $\mathbb{R}_+^*$ et que « être de classe $\mathscr{C}^1$ » est une propriété locale, on conclut que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a par le théorème que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\, dt.$$

Exercice 8

On considère la fonction d'une variable réelle

$$g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que g est définie sur $]0,+\infty[$.
2) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$.
3) Montrer que g est l'unique solution de l'équation différentielle $xy' = xy - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ admettant une limite nulle en $+\infty$.

Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ pour une intégrale à paramètre

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et A un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A;

(ii) pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$ et tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est intégrable sur I;

(iii) pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I;

Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ pour une intégrale à paramètre

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et A un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction vérifiant les hypothèses suivantes :

(iv) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t) \, ; \qquad \text{(Hypothèse de domination)}$$

alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathscr{C}^k$ sur l'intervalle A. De plus, on a

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \quad \forall x \in A, \quad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 9

Montrons que $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x, t) \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{itx}$ vérifie les hypothèses suivantes.

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{itx}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 9

(ii) Soit $j \in [\![0, k-1]\!]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$t \longmapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) = (\mathrm{i}t)^j \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{itx}$$

est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\right| = \left|(\mathrm{i}t)^j \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{itx}\right| = t^j \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

donc la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\mathrm{i}t)^{n+1} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 9

(iv) On a la majoration

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| = \left| (\mathrm{i}t)^k \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{itx} \right| \leqslant t^k \mathrm{e}^{-t^2}$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto t^k \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On conclut par le théorème ci-dessus que g est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$. Comme $k \in \mathbb{N}^*$ est un entier arbitraire, on vient de montrer que g est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, on a par le théorème que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(j)}(x) = \int_0^{+\infty} (\mathrm{i}t)^j \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 9

Comme pour le théorème précédent, il est possible de se limiter à vérifier l'hypothèse (iv) sur tout segment de A pour conclure que g est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A, car « être de classe $\mathscr{C}^k$ » est une propriété locale.