TD 12 Intégrales dépendant d'un paramètre

Partie I Intégrales dépendant d'un paramètre entier

Exercice 1 : Déterminer la limite des suites de terme général suivant.

$$(i)\quad u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (ii)\quad v_n = \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(nt)\mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 : Déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} \operatorname{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 : Montrer les égalités suivantes.

$$(i)\quad \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}, \qquad (ii)\quad \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2},$$

$$(iii)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}, \qquad (iv)\quad \int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

Exercice 4 : On considère la fonction d'une variable réelle définie par

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + x^2}.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'on a la relation

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Partie II Intégrales dépendant d'un paramètre réel

Exercice 5 : On considère la fonction d'une variable réelle

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction f est définie sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$.
3. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

Exercice 6 : On considère la fonction d'une variable réelle

$$f : x \mapsto \int_0^{\pi} \cos\big(x \sin(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution de $xy'' + y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 7 - Intégrale de Gauss : On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(x)^2 + g(x) = \pi/4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire qu'on a

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 8 : Montrer qu'il existe un unique réel $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)\mathrm{e}^{-t}}{1+t^x}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 9 : On considère la fonction d'une variable réelle

$$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En utilisant les résultats de l'exercice 7, montrer que f est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ admettant une limite nulle en $+\infty$ de l'équation différentielle
$$y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$
5. Montrer que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 10 - Transformée de Fourier : On définit la transformée de Fourier de toute fonction continue et intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\,dt.$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^{-t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $\hat{f}$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
   (c) En utilisant les résultats de l'exercice 7, déterminer une expression explicite de $\hat{f}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 : Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ qu'on a l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(x/t)}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt.$$

Exercice 12 - Fonction Gamma : On considère la fonction d'une variable réelle

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction Γ est définie sur $]0,+\infty[$.
2. (a) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (b) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Montrer que la fonction Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
   (d) Déterminer un équivalent de Γ en 0^+.
3. (a) Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^p(t)e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$
   (b) Montrer que les fonctions Γ et $\ln\circ\Gamma$ sont convexes sur $]0,+\infty[$.
4. Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, on considère la fonction
$$I_{n,k} : x \longmapsto \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^k dt.$$
   (a) Soit $(k,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $I_{n,k}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer pour tout $(k,n,x) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+^*$ qu'on a
$$I_{n,k}(x) = \frac{k}{xn} I_{n,k-1}(x+1),$$
   puis en déduire la valeur de $I_{n,n}(x)$.
   (c) En déduire qu'on a la relation
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$
   (d) Montrer la formule de duplication ci-dessous
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2x).$$
   (e) Déterminer la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.