CHAPITRE 1

Fonctions vectorielles

Jérôme Von Buhren

http://vonbuhren.free.fr

Lycée Couffignal - PSI*

Dans ce chapitre, nous allons étendre les notions d'analyse de première année étudiée pour une fonction à valeurs réelles au cadre de fonctions à valeurs vectorielles.

Dans tout le chapitre, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Définition (Fonctions vectorielles)

Une fonction vectorielle est une application $f : I \to \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Remarque 1

Les espaces vectoriels $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ s'identifiant naturellement à $\mathbb{R}^n$, toutes les notions de ce chapitre s'adaptent aisément aux fonctions de la forme $f : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou de la forme $f : I \to \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Définition (Fonctions coordonnées d'une fonction vectorielle)

Les fonctions coordonnées d'une fonction vectorielle $f : I \to \mathbb{R}^n$ sont les n fonctions $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}^n$ telles que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big).$$

Notation

On utilisera la notation $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Exemple 1

La fonction vectorielle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f : t \mapsto \big(\cos(t), \sin(t)\big)$ s'écrit $f = (f_1, f_2)$ où les deux fonctions $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définies par $f_1 : t \mapsto \cos(t)$ et $f_2 : t \mapsto \sin(t)$.

On rappelle que la norme associée au produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$ est l'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Cette application vérifie les propriétés suivantes.

(i) Positivité : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\| \geqslant 0$,

(ii) Séparation : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,

(iii) Homogénéité : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

(iv) Inégalité triangulaire : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Remarques 2

a) Dans la suite du chapitre, nous utiliserons la norme euclidienne définie ci-dessus afin de définir la notion de limites pour une fonction vectorielle.

b) Nous définirons dans un chapitre ultérieur une notion plus générale de norme sur $\mathbb{R}^n$, mais nous verrons que les notions définies sur les fonctions vectorielles ne dépendent pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$.

Les notions étudiées dans cette partie seront généralisées et approfondies dans un chapitre ultérieur.

Définition (Limite d’une fonction vectorielle en un point)

Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle et $a \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I. On dit que f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}^n$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \,]a-\eta, a+\eta[\, \cap I, \quad \left\| f(x) - \ell \right\| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Remarques 3

a) On a que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \left\| f(x) - \ell \right\| = 0$.

b) Si la limite de $f : I \to \mathbb{R}^n$ au point $a \in \mathbb{R}$ existe, alors elle est unique.

Théorème (Caractérisation de la limite par les fonctions coordonnées)

Soient $f = (f_1, \ldots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle,
un n-uplet $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.
On a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lim_{x \to a} f_k(x) = \ell_k.$$

Exemple 2

On a $\lim\limits_{t \to 0} \left(t^2 - t + 1, t^2 + t + 1\right) = (1, 1)$.

Définition (Continuité d'une fonction vectorielle)

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

(i) On dit que la fonction f est continue en un point $a \in I$ si $\lim_{t \to a} f(t) = f(a)$.

(ii) On dit que la fonction f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Théorème (Caractérisation de la continuité par les fonctions...)

Soit $f = (f_1, \dots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

(i) La fonction f est continue en un point $a \in I$ si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont continues en a.

(ii) La fonction f est continue sur I si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont continues sur I.

Exemple 3

La fonction vectorielle de l'exemple 1 est continue sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $f_1 = \cos$ et $f_2 = \sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Proposition (Opérations sur les fonctions continues)

Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions vectorielles continues.

(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction vectorielle $\lambda f + \mu g$ est continue sur I.

(ii) Si $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors la fonction vectorielle λf est continue sur I.

(iii) Si $\varphi : J \to I$ est une fonction continue sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, alors la fonction vectorielle $f \circ \varphi$ est continue sur J.

Définition (Dérivabilité d'une fonction vectorielle)

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

(i) La fonction vectorielle f est dite dérivable en un point $a \in I$ si le taux d'accroissement
$$t \mapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$
admet une limite finie lorsque $t \to a$. Dans ce cas, la limite est notée $f'(a)$ et s'appelle le vecteur dérivé de f en a.

(ii) La fonction vectorielle f est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on appelle la fonction $f' : I \to \mathbb{R}^n$ définie par $f' : t \mapsto f'(t)$ la fonction dérivée de f.

Théorème (Caractérisation de la dérivabilité par le développement...)

Soit $f = (f_1, \dots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. La fonction f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si il existe un vecteur $\ell \in \mathbb{R}^n$ et une fonction vectorielle $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0_{\mathbb{R}^n}$ tels que

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \ell h + h\varepsilon(h).$$

Dans ce cas, on a $\ell = f'(a)$.

Théorème (Caractérisation de la dérivabilité par les fonctions...)

Soit $f = (f_1, \ldots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

(i) La fonction f est dérivable en un point $a \in I$ si et seulement si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont dérivables en a. Dans ce cas, on a l'égalité $f'(a) = \big(f_1'(a), \ldots, f_n'(a)\big)$.

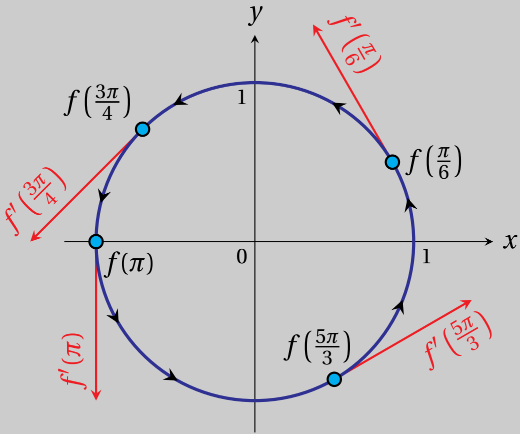
(ii) La fonction f est dérivable sur I si et seulement si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont dérivables sur I. Dans ce cas, on a l'égalité $f' = \big(f_1', \ldots, f_n'\big)$.

Exemple 4

La fonction vectorielle de l'exemple 1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $f_1 = \cos$ et $f_2 = \sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Illustration

Si le déplacement d'un objet dans $\mathbb{R}^n$ est décrit par une fonction vectorielle $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable, alors $f'(a)$ est le vecteur vitesse de l'objet à la position $f(a)$. En reprenant l'exemple 1, on a la figure suivante.



Proposition (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions vectorielles dérivables.

(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction vectorielle $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et on a $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

(ii) Si $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors la fonction vectorielle λf est dérivable sur I et on a $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$.

(iii) Si $\varphi : J \to I$ est une fonction dérivable sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, alors la fonction vectorielle $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et on a $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$.

Proposition 1

Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ une application linéaire avec $d \in \mathbb{N}^*$. Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle dérivable sur I, alors l'application $L(f) = L \circ f : I \to \mathbb{R}^d$ est dérivable sur I et on a $[L(f)]' = L(f')$.

Exemple 5

Si $X : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une fonction vectorielle dérivable et $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction vectorielle $AX : I \to \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ définie par $AX : t \mapsto AX(t)$ est dérivable sur I et on a $(AX)' = AX'$.

Soient $(n_1, n_2, d) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Rappelons qu'une application $B: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est bilinéaire si

(i) pour tout $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, l'application $x_2 \longmapsto B(x_1, x_2)$ est linéaire de $\mathbb{R}^{n_2}$ dans $\mathbb{R}^d$;

(ii) pour tout $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, l'application $x_1 \longmapsto B(x_1, x_2)$ est linéaire de $\mathbb{R}^{n_1}$ dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition 2

Soit $B: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application bilinéaire avec $(n_1, n_2, d) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ sont des fonctions vectorielles dérivables sur I, alors l'application $B(f, g): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ définie par $B(f, g): t \longmapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable sur I et on a $[B(f, g)]' = B(f', g) + B(f, g')$.

Exemples 6

a) Comme l'application $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $B : (x, y) \mapsto xy$ est bilinéaire, on retrouve la formule habituelle pour la dérivée d'un produit de deux fonctions dérivables $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$.

b) On note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$.
Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions vectorielles dérivables sur I, alors l'application $\varphi : t \mapsto \big\langle f(t) \mid g(t) \big\rangle$ est dérivable sur I et on a

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = \big\langle f'(t) \mid g(t) \big\rangle + \big\langle f(t) \mid g'(t) \big\rangle .$$

c) On note $\wedge$ le produit vectoriel sur $\mathbb{R}^3$.
Si $f : I \to \mathbb{R}^3$ et $g : I \to \mathbb{R}^3$ sont deux fonctions vectorielles dérivables sur I, alors l'application $\psi : t \mapsto f(t) \wedge g(t)$ est dérivable sur I et on a

$$\forall t \in I, \quad \psi'(t) = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t).$$

Exercice 1

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire euclidien canonique. On fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et on considère une fonction vectorielle $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1. Montrer que $\varphi : t \mapsto \langle f(b) - f(a) \mid f(t) \rangle$ est dérivable sur $]a,b[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer qu'il existe $c \in\ ]a,b[$ tel que $\|f(b) - f(a)\| \leqslant (b-a)\,\|f'(c)\|$.

Soient $(p,d) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(n_1,\dots,n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$. Rappelons qu'une application $M : \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_p} \to \mathbb{R}^d$ est p-linéaire si

$$\forall k \in [\![1,p]\!], \quad \forall (x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots x_p) \in \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{p} \mathbb{R}^{n_k}, \quad \varphi_k : x_k \mapsto \varphi(x_1,\dots,x_p)$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^{n_k}$ dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition 3

Soit $M : \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_p} \to \mathbb{R}^d$ une application p-linéaire avec $(p,d) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(n_1,\dots,n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$.
Si $f_k : I \to \mathbb{R}^{n_k}$ est une fonctions vectorielle dérivable sur I pour chaque $k \in [\![1,p]\!]$, alors l'application $M(f_1,\dots,f_p)$ définie par $M(f_1,\dots,f_p) : t \mapsto M(f_1(t),\dots,f_p(t))$ est dérivable sur I et on a

$$[M(f_1,\dots,f_p)]' = \sum_{k=1}^{p} M(f_1,\dots,f_{k-1},f_k',f_{k+1},\dots,f_p).$$

Exemple 7

On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $f_k : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonctions vectorielle dérivable sur I pour chaque $k \in [\![1, p]\!]$, alors l'application $\delta : t \mapsto \det_{\mathscr{C}}(f_1(t), \ldots, f_n(t))$ est dérivable et on a

$$\forall t \in I, \quad \delta'(t) = \sum_{k=1}^{p} \det_{\mathscr{C}}\big(f_1(t), \ldots, f_{k-1}(t), f_k'(t), f_{k+1}(t), \ldots, f_p(t)\big).$$

Exercice 2

Soient $u, v, w : [a, b] \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ avec $a < b$. On suppose que

$$\begin{vmatrix} u(a) & u(b) & u'(a) \\ v(a) & v(b) & v'(a) \\ w(a) & w(b) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ vérifiant

$$\begin{vmatrix} u(a) & u(b) & u''(c) \\ v(a) & v(b) & v''(c) \\ w(a) & w(b) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}_{[n]} .$$

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, on peut définir les dérivées successives d'une fonction vectorielle par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que $f : I \to \mathbb{R}^n$ est k fois dérivable si

$$\forall p \in [\![1, k]\!], \quad \text{la fonction } f^{(p-1)} \text{ est dérivable et on note } f^{(p)} = \left(f^{(p-1)}\right)'.$$

Dans ce cas, on appelle $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}^n$ la k-ième dérivée de la fonction f. Par convention, on a $f^{(0)} = f$.

Définition (Fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^k$)

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

(i) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction vectorielle f est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si elle est dérivable k-fois sur I et si sa dérivée k-ième $f^{(k)}$ est continue sur I.

(ii) La fonction vectorielle f est dite de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème (Caractérisation des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ par les fonctions...)

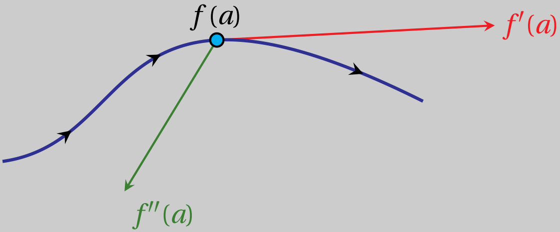
Soit $f = (f_1, \ldots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

(i) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si et seulement si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont de classes $\mathscr{C}^k$ sur I. Dans ce cas, on a $f^{(k)} = \left(f_1^{(k)}, \ldots, f_n^{(k)}\right)$.

(ii) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si et seulement si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont de classes $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Illustration

Si le déplacement d'un objet dans $\mathbb{R}^n$ est décrit par une fonction vectorielle $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^2$, alors $f''(a)$ représente le vecteur d'accélération de l'objet à la position $f(a)$.



Proposition (Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$)

Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^k$ sur I avec $k \in \mathbb{N}$.

(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction vectorielle $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et on a $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.

(ii) Formule de Leibniz : si $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^k$, alors la fonction λf est de classe $\mathscr{C}^k$ et on a

$$(\lambda f)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{(i)} f^{(k-i)}.$$

(iii) Si $\varphi : J \to I$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^{(k)}$ sur J.

Exercice 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^2$ telle que

$$\forall t \in I, \quad f''(t) \in \mathrm{Vect}(f(t)).$$

1. Montrer que l'application $t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ est constante.
2. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ ne sont pas colinéaires. Montrer que les valeurs prises par $f(t)$ sont contenues dans un plan.
3. On suppose que f ne s'annule pas et qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ soient colinéaires. Montrer que l'image de f est contenue dans une droite.