TD 1 Fonctions vectorielles

Partie I Révisions - Fonctions réelles d'une variable réelle

I.A - Généralités

Exercice 1 : On considère la fonction d'une variable réelle définie par

$$f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right).$$

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.

Exercice 2 : Étudier la parité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

Exercice 3 : Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Si f est paire, que peut-on dire sur la parité de f' ?
2. Si f est impaire, que peut-on dire sur la parité de f' ?

Exercice 5 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |\cos(x)\sin(x)|.$$

1. Montrer que la fonction f est périodique.
2. Déterminer sa plus petite période strictement positive.

I.B - Limites et continuité

Exercice 6 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f(x) = \frac{x+1}{x^3+1}.$$

Montrer que f se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction continue.

Exercice 7 : Étudier si les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous se prolongent à $\mathbb{R}$ par continuité.

$$(i) \ \ f : x \mapsto \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (ii) \ \ g : x \mapsto \cos(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

I.C - Dérivabilité

Exercice 8 : Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de la fonction f dans chacun des cas suivants.

$$(i) \ \ f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}, \quad (ii) \ \ f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}, \quad (iii) \ \ f : x \mapsto (x-1)\operatorname{Arccos}\left(x^2\right).$$

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{e^x - 1}.$$

Montrer que f se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction dérivable.

Exercice 10 : En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x \in]0,1[, \quad x < \operatorname{Arcsin}(x) < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 11 : Soit $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f : x \mapsto \sqrt{\sin(x)} + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi/2]$ sur un intervalle I à préciser.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur I.

I.D - Analyse asymptotique des fonctions

Exercice 12 : Déterminer les développements limités en 0 des fonctions suivantes.

$$(i)\ \frac{1}{1+x+x^2} \text{ à l'ordre } 4, \qquad (ii)\ \frac{\ln(1+x)}{1-x+x^2} \text{ à l'ordre } 3,$$
$$(iii)\ \frac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)} \text{ à l'ordre } 3, \qquad (iv)\ \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{\tan(x)} \text{ à l'ordre } 2,$$
$$(v)\ \ln(\cos(x)) \text{ à l'ordre } 4, \qquad (vi)\ (1+\sin(x))^{1/x} \text{ à l'ordre } 2.$$

Exercice 13 : Déterminer les développements limités des fonctions suivantes.

$$(i)\ \sin(x)^{\sin(x)} \text{ en } \frac{\pi}{2} \text{ à l'ordre } 4, \qquad (ii)\ \frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en 1 à l'ordre } 2.$$

Exercice 14 : Étudier l'existence d'asymptote en $\pm\infty$ à la courbe représentative des fonctions suivantes, puis leur position relative.

$$(i)\ \sqrt{x(x+1)}, \qquad (ii)\ x\big(\ln(2x+1)-\ln(x)\big), \qquad (iii)\ \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}.$$

Exercice 15 : Déterminer les limites suivantes.

$$(i)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}, \qquad (ii)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{\operatorname{sh}(x)^2},$$
$$(iii)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}, \qquad (iv)\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-\mathrm{e}}{x}.$$

Exercice 16 : On note $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x\mathrm{e}^{x^2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction f admet une application réciproque définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 6.

Partie II Fonctions vectorielles

Exercice 17 : On considère une fonction vectorielle $f=(f_1,f_2,f_3):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ dérivable telle que

$$\begin{cases} f_1' &= f_2-f_3 \\ f_2' &= -f_1+f_3 \\ f_3' &= f_1-f_2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_1(0) &= 1 \\ f_2(0) &= 0 \\ f_3(0) &= 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $f(\mathbb{R})$ est inclus dans le plan d'équation $x+y+z=1$.
2. Montrer que $t\mapsto \|f(t)\|$ est constante. Que peut-on en déduire pour $f(\mathbb{R})$?

Exercice 18 : Soit $f:I\to\mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe un vecteur $v\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t\in I, \quad f'(t)=f(t)\wedge v.$$

1. Montrer que l'ensemble $f(I)$ est inclus dans un plan de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que l'ensemble $f(I)$ est inclus dans un cercle.
3. Montrer que l'application $t\mapsto \|f'(t)\|$ est constante.

Exercice 19 : Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non inversible avec $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe $L\in\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nul tel que $LA=0_{1,n}$.
2. En déduire que si $X:\mathbb{R}\to\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une fonction vectorielle dérivable vérifiant $X'=AX$, alors il existe $L\in\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nul et $c\in\mathbb{R}$ tel que $LX=c$.

Exercice 20 - Wronskien : Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et des fonctions $a_0,\dots,a_{n-1}:I\to\mathbb{R}$ continues sur un intervalle I. On considère des solutions $y_1,\dots,y_n:I\to\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y^{(n)}+a_{n-1}y_{n-1}+\cdots+a_0y=0.$$

Montrer que la fonction $\omega:I\to\mathbb{R}$ définie par

$$w:t\mapsto \det\big((y_i^{(j-1)}(t))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\big).$$

est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur I.