



CHAPITRE 1

Fonctions vectorielles

Plan du chapitre

I Préliminaires	2
II Limite et continuité d'une fonction vectorielle	3
A - Limite d'une fonction vectorielle en un point.....	3
B - Continuité d'une fonction vectorielle.....	3
III Dérivabilité des fonctions vectorielles	4
A - Vecteur dérivé d'une fonction vectorielle.....	4
B - Fonctions vectorielles de classe \mathcal{C}^k	7

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étendre les notions d'analyse de première année étudiée pour une fonction à valeurs réelles au cadre de fonctions à valeurs vectorielles.

Dans tout le chapitre, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un intervalle I de \mathbb{R} contenant au moins deux points.

Partie I Préliminaires

Définition (Fonctions vectorielles) : Une fonction vectorielle est une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle non vide de \mathbb{R} .

Remarque 1 : Les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ s'identifiant naturellement à \mathbb{R}^n , toutes les notions de ce chapitre s'adaptent aisément aux fonctions de la forme $f : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou de la forme $f : I \rightarrow \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Définition (Fonctions coordonnées d'une fonction vectorielle) : Les fonctions coordonnées d'une fonction vectorielle $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont les n fonctions $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

Notation : On utilisera la notation $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Exemple 1 : La fonction vectorielle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ s'écrit $f = (f_1, f_2)$ où les deux fonctions $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par $f_1 : t \mapsto \cos(t)$ et $f_2 : t \mapsto \sin(t)$.

On rappelle que la norme associée au produit scalaire euclidien canonique sur \mathbb{R}^n est l'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Cette application vérifie les propriétés suivantes.

- (i) Positivité : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\| \geq 0$,
- (ii) Séparation : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- (iii) Homogénéité : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- (iv) Inégalité triangulaire : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Remarques 2 :

- a) Dans la suite du chapitre, nous utiliserons la norme euclidienne définie ci-dessus afin de définir la notion de limites pour une fonction vectorielle.
- b) Nous définirons dans un chapitre ultérieur une notion plus générale de norme sur \mathbb{R}^n , mais nous verrons que les notions définies sur les fonctions vectorielles ne dépendent pas de la norme choisie sur \mathbb{R}^n .

Partie II Limite et continuité d'une fonction vectorielle

Les notions étudiées dans cette partie seront généralisées et approfondies dans un chapitre ultérieur.

II.A - Limite d'une fonction vectorielle en un point

Définition (Limite d'une fonction vectorielle en un point) : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle et $a \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I . On dit que f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}^n$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I, \quad \|f(x) - \ell\| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Remarques 3 :

- On a que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - \ell\| = 0$.
- Si la limite de $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ au point $a \in \mathbb{R}$ existe, alors elle est unique.

Théorème (Caractérisation de la limite par les fonctions coordonnées) : Soient $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, un n -uplet $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I . On a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = \ell_k.$$

Exemple 2 : On a $\lim_{t \rightarrow 0} (t^2 - t + 1, t^2 + t + 1) = (1, 1)$.

II.B - Continuité d'une fonction vectorielle

Définition (Continuité d'une fonction vectorielle) : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

- On dit que la fonction f est continue en un point $a \in I$ si $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$.
- On dit que la fonction f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

Théorème (Caractérisation de la continuité par les fonctions coordonnées) : Soit $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

- La fonction f est continue en un point $a \in I$ si et seulement si les fonctions f_1, \dots, f_n sont continues en a .
- La fonction f est continue sur I si et seulement si les fonctions f_1, \dots, f_n sont continues sur I .

Exemple 3 : La fonction vectorielle de l'exemple 1 est continue sur \mathbb{R} car les fonctions $f_1 = \cos$ et $f_2 = \sin$ sont continues sur \mathbb{R} .

Proposition (Opérations sur les fonctions continues) : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions vectorielles continues.

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction vectorielle $\lambda f + \mu g$ est continue sur I .
- Si $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors la fonction vectorielle λf est continue sur I .
- Si $\varphi : J \rightarrow I$ est une fonction continue sur un intervalle J de \mathbb{R} , alors la fonction vectorielle $f \circ \varphi$ est continue sur J .

Partie III Dérivabilité des fonctions vectorielles

III.A - Vecteur dérivé d'une fonction vectorielle

Définition (Dérivabilité d'une fonction vectorielle) : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

(i) La fonction vectorielle f est dite dérivable en un point $a \in I$ si le taux d'accroissement

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

admet une limite finie lorsque $t \rightarrow a$. Dans ce cas, la limite est notée $f'(a)$ et s'appelle le vecteur dérivé de f en a .

(ii) La fonction vectorielle f est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I . Dans ce cas, on appelle la fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f' : t \mapsto f'(t)$ la fonction dérivée de f .

Théorème (Caractérisation de la dérivabilité par le développement limité) : Soit $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. La fonction f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si il existe un vecteur $\ell \in \mathbb{R}^n$ et une fonction vectorielle $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0_{\mathbb{R}^n}$ tels que

$$f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h).$$

Dans ce cas, on a $\ell = f'(a)$.

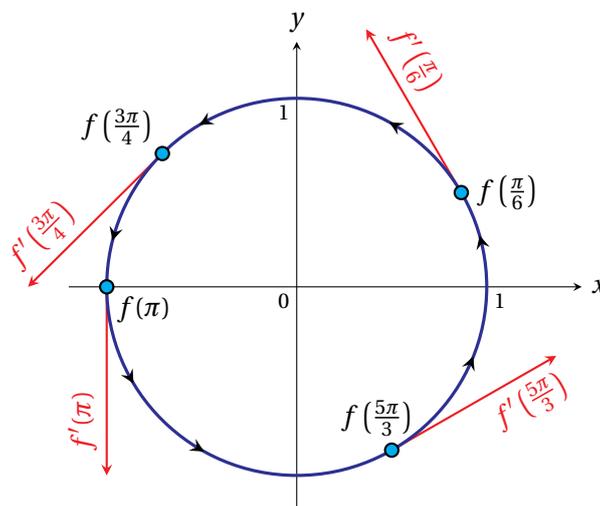
Théorème (Caractérisation de la dérivabilité par les fonctions coordonnées) : Soit $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

(i) La fonction f est dérivable en un point $a \in I$ si et seulement si les fonctions f_1, \dots, f_n sont dérivables en a . Dans ce cas, on a l'égalité $f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_n(a))$.

(ii) La fonction f est dérivable sur I si et seulement si les fonctions f_1, \dots, f_n sont dérivables sur I . Dans ce cas, on a l'égalité $f' = (f'_1, \dots, f'_n)$.

Exemple 4 : La fonction vectorielle de l'exemple 1 est dérivable sur \mathbb{R} car les fonctions $f_1 = \cos$ et $f_2 = \sin$ sont dérivables sur \mathbb{R} . De plus, on a $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Illustration : Si le déplacement d'un objet dans \mathbb{R}^n est décrit par une fonction vectorielle $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable, alors $f'(a)$ est le vecteur vitesse de l'objet à la position $f(a)$. En reprenant l'exemple 1, on a la figure suivante.



Proposition (Opérations sur les fonctions dérivables) : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions vectorielles dérivables.

- (i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction vectorielle $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et on a $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- (ii) Si $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors la fonction vectorielle λf est dérivable sur I et on a $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$.
- (iii) Si $\varphi : J \rightarrow I$ est une fonction dérivable sur un intervalle J de \mathbb{R} , alors la fonction vectorielle $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et on a $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$.

Proposition 1 : Soit $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application linéaire avec $d \in \mathbb{N}^*$. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle dérivable sur I , alors l'application $L(f) = L \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ est dérivable sur I et on a $[L(f)]' = L(f')$.

Exemple 5 : Si $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une fonction vectorielle dérivable et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction vectorielle $AX : I \rightarrow \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ définie par $AX : t \mapsto AX(t)$ est dérivable sur I et on a $(AX)' = AX'$.

Soient $(n_1, n_2, d) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Rappelons qu'une application $B : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^d$ est bilinéaire si

- (i) pour tout $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, l'application $x_2 \mapsto B(x_1, x_2)$ est linéaire de \mathbb{R}^{n_2} dans \mathbb{R}^d ;
- (ii) pour tout $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, l'application $x_1 \mapsto B(x_1, x_2)$ est linéaire de \mathbb{R}^{n_1} dans \mathbb{R}^d .

Proposition 2 : Soit $B : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application bilinéaire avec $(n_1, n_2, d) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ sont des fonctions vectorielles dérivables sur I , alors l'application $B(f, g) : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ définie par $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable sur I et on a $[B(f, g)]' = B(f', g) + B(f, g')$.

Exemples 6 :

- a) Comme l'application $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $B : (x, y) \mapsto xy$ est bilinéaire, on retrouve la formule habituelle pour la dérivée d'un produit de deux fonctions dérivables $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- b) On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien canonique sur \mathbb{R}^n . Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions vectorielles dérivables sur I , alors l'application $\varphi : t \mapsto \langle f(t) | g(t) \rangle$ est dérivable sur I et on a

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = \langle f'(t) | g(t) \rangle + \langle f(t) | g'(t) \rangle.$$

- c) On note \wedge le produit vectoriel sur \mathbb{R}^3 . Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux fonctions vectorielles dérivables sur I , alors l'application $\psi : t \mapsto f(t) \wedge g(t)$ est dérivable sur I et on a

$$\forall t \in I, \quad \psi'(t) = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t).$$

Exercice 1 : On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire euclidien canonique. On fixe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et on considère une fonction vectorielle $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. Montrer que $\varphi : t \mapsto \langle f(b) - f(a) | f(t) \rangle$ est dérivable sur $]a, b[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a) \|f'(c)\|$.

Soient $(p, d) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(n_1, \dots, n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$. Rappelons qu'une application $M: \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^d$ est p -linéaire si

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \forall (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p) \in \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p \mathbb{R}^{n_i}, \quad \varphi_k: x_k \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_p)$$

est une application linéaire de \mathbb{R}^{n_k} dans \mathbb{R}^d .

Proposition 3 : Soit $M: \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application p -linéaire avec $(p, d) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(n_1, \dots, n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$. Si $f_k: I \rightarrow \mathbb{R}^{n_k}$ est une fonctions vectorielle dérivable sur I pour chaque $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, alors l'application $M(f_1, \dots, f_p)$ définie par $M(f_1, \dots, f_p): t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_p(t))$ est dérivable sur I et on a

$$[M(f_1, \dots, f_p)]' = \sum_{k=1}^p M(f_1, \dots, f_{k-1}, f_k', f_{k+1}, \dots, f_p).$$

Exemple 7 : On note \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^n . Si $f_k: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonctions vectorielle dérivable sur I pour chaque $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, alors l'application $\delta: t \mapsto \det_{\mathcal{C}}(f_1(t), \dots, f_n(t))$ est dérivable et on a

$$\forall t \in I, \quad \delta'(t) = \sum_{k=1}^p \det_{\mathcal{C}}(f_1(t), \dots, f_{k-1}(t), f_k'(t), f_{k+1}(t), \dots, f_p(t)).$$

Exercice 2 : Soient $u, v, w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ avec $a < b$. On suppose que

$$\begin{vmatrix} u(a) & u(b) & u'(a) \\ v(a) & v(b) & v'(a) \\ w(a) & w(b) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ vérifiant

$$\begin{vmatrix} u(a) & u(b) & u''(c) \\ v(a) & v(b) & v''(c) \\ w(a) & w(b) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}_{[n]} .$$

III.B - Fonctions vectorielles de classe \mathcal{C}^k

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, on peut définir les dérivées successives d'une fonction vectorielle par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est k fois dérivable si

$$\forall p \in \llbracket 1, k \rrbracket, \text{ la fonction } f^{(p-1)} \text{ est dérivable et on note } f^{(p)} = (f^{(p-1)})'.$$

Dans ce cas, on appelle $f^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ la k -ième dérivée de la fonction f . Par convention, on a $f^{(0)} = f$.

Définition (Fonction vectorielle de classe \mathcal{C}^k) : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

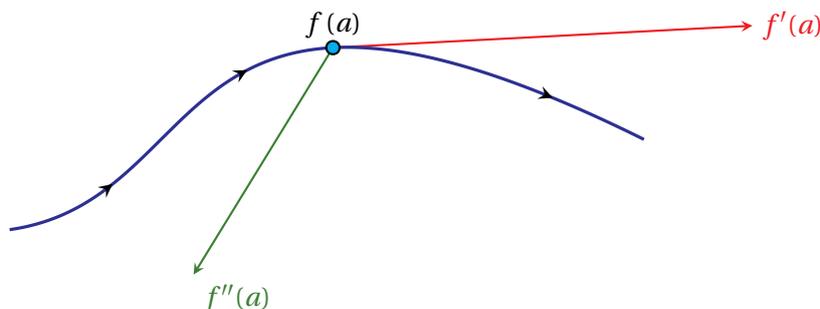
- (i) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction vectorielle f est dite de classe \mathcal{C}^k sur I si elle est dérivable k -fois sur I et si sa dérivée k -ième $f^{(k)}$ est continue sur I .
- (ii) La fonction vectorielle f est dite de classe \mathcal{C}^∞ sur I si elle est de classe \mathcal{C}^k sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème (Caractérisation des fonctions de classe \mathcal{C}^k par les fonctions coordonnées) :

Soit $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

- (i) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction f est de classe \mathcal{C}^k sur I si et seulement si les fonctions f_1, \dots, f_n sont de classes \mathcal{C}^k sur I . Dans ce cas, on a $f^{(k)} = (f_1^{(k)}, \dots, f_n^{(k)})$.
- (ii) La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I si et seulement si les fonctions f_1, \dots, f_n sont de classes \mathcal{C}^∞ sur I . Dans ce cas, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)} = (f_1^{(k)}, \dots, f_n^{(k)})$.

Illustration : Si le déplacement d'un objet dans \mathbb{R}^n est décrit par une fonction vectorielle $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^2 , alors $f''(a)$ représente le vecteur d'accélération de l'objet à la position $f(a)$.



Proposition (Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k) : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions vectorielles de classe \mathcal{C}^k sur I avec $k \in \mathbb{N}$.

- (i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction vectorielle $\lambda f + \mu g$ est de classe \mathcal{C}^k sur I et on a $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.
- (ii) Formule de Leibniz : si $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^k , alors la fonction λf est de classe \mathcal{C}^k et on a

$$(\lambda f)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^{(i)} f^{(k-i)}.$$

- (iii) Si $\varphi : J \rightarrow I$ est une fonction de classe \mathcal{C}^k sur un intervalle J de \mathbb{R} , alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^{(k)}$ sur J .

Exercice 4 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle de classe \mathcal{C}^2 telle que

$$\forall t \in I, \quad f''(t) \in \text{Vect}(f(t)).$$

1. Montrer que l'application $t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ est constante.
2. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ ne sont pas colinéaires. Montrer que les valeurs prises par $f(t)$ sont contenues dans un plan.
3. On suppose que f ne s'annule pas et qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ soient colinéaires. Montrer que l'image de f est contenue dans une droite.