

TD 16 Fonctions de plusieurs variables

Partie I Dérivées partielles

Exercice 1 : On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées suivant tout vecteur en $(0, 0)$.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 2 : On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$.

Exercice 3 : On définit l'application $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x(x + y) \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que f se prolonge à $\mathbb{R}^2$ en une fonction continue.
2. Étudier l'existence des dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 : On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) = (x^2 - y^2) \ln(x^2 + y^2).$$

Montrer que f se prolonge à $\mathbb{R}^2$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Partie II Équations aux dérivées partielles

Exercice 5 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$3 \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} = f. \quad (E)$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u, v) = (x + y, 2x + 3y)$.

Exercice 6 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (E)$$

On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 7 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad 2xy \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (1 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

en utilisant $x = \frac{u^2 + v^2}{2}$ et $y = \frac{u}{v}$.

Exercice 8 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u, v) = (xy, x/y)$.

Partie III Extremums d'une fonction de deux variables

Exercice 9 : Étudier les extremums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes.

$$(i) f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y, \quad (ii) f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

Exercice 10 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + y)e^{-(x^2 + y^2)}.$$

1. Étudier les extremums locaux de la fonction f .
2. Montrer que les extremums trouvés précédemment sont globaux.

Exercice 11 : On considère la fonction $f : [-1, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 - \sqrt{1 - x^2} \cos(y).$$

1. Déterminer les points critiques de l'application f sur $] -1, 1[\times \mathbb{R}$.
2. Déterminer la nature de chaque point critique de l'application f .

Exercice 12 : Déterminer les extremums globaux de $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x - y + x^3 + y^3.$$

Exercice 13 : Déterminer les extremums globaux de $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

avec $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

Exercice 14 : Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1. Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur $\mathcal{C}$?

Partie IV Applications géométriques

Exercice 15 - Hyperbole : Soient $a, b > 0$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe plane d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{C}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathcal{C}$.

Exercice 16 : Représenter quelques lignes de niveau et quelques gradients de l'application $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g : (x, y) \mapsto yx^{-1}$.

Exercice 17 : Déterminer les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $x = 8yz$ contenant la droite $\mathcal{D}$ d'équation

$$\begin{cases} y &= 1 \\ x + 4z + 2 &= 0. \end{cases}$$

Exercice 18 : Soit $\mathcal{S}$ la surface de l'espace d'équation $z^3 = xy$.

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{S}$.
2. Déterminer les plans tangents à $\mathcal{S}$ contenant la droite $\mathcal{D}$ d'équation

$$\begin{cases} x - 2 &= 0 \\ y - 3z - 3 &= 0. \end{cases}$$

Exercice 19 : Déterminer les points de la surface $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ en lesquels le plan tangent est parallèle au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z = 0$.

Exercice 20 : On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation $xyz = 1$ et $A \in \mathcal{S}$.

1. Déterminer une équation du plan tangent $\mathcal{P}_A$ à la surface $\mathcal{S}$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de l'origine sur le plan $\mathcal{P}_A$.