Mathématiques PSI Lycée Coufignal

CHAPITRE 16

Fonctions de plusieurs variables

Plan du chapitre

Introduction

La notion de fonctions de plusieurs variables apparaît très tôt en physique où l'on étudie souvent des grandeurs dépendant de plusieurs paramètres. Le mathématicien écossais James Gregory en donne une des premières définitions formelles dans ses traités *Vera circuli* et *hyperbolae quadratura* publiés en 1667 : « une fonction est une quantité obtenue à partir d'autres quantités par une succession d'opérations algébriques ou par n'importe quelle opération imaginable ».

La notion de dérivée partielle s'est développée à la fin de XVII^{e} siècle lorsque Newton fonda le calcul différentiel. Durant cette période, les fonctions de plusieurs variables gagnent en importance : de nombreux problèmes issus de la géométrie ou de la mécanique conduisaient naturellement à la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Il subsiste néanmoins des faiblesses dans l'utilisation des fonctions de plusieurs variables : elle manque de rigueur, principalement à cause de la mauvaise compréhension de la notion de fonction à cette époque. Il faut attendre la fin du XIXe siècle et le XXe siècle pour voir les techniques se formaliser, notamment celles portant sur les dérivées partielles.

Dans ce chapitre, nous commencerons par introduire la notion de dérivée partielle puis nous établirons ses principales propriétés afin notamment de résoudre certaines équations aux dérivées partielles et d'étudier les extremums globaux d'une fonction de plusieurs variables. Dans un second temps, nous appliquerons ces nouvelles notions à l'étude d'objets géométriques.

Dans tout le chapitre, on fixe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^p$.

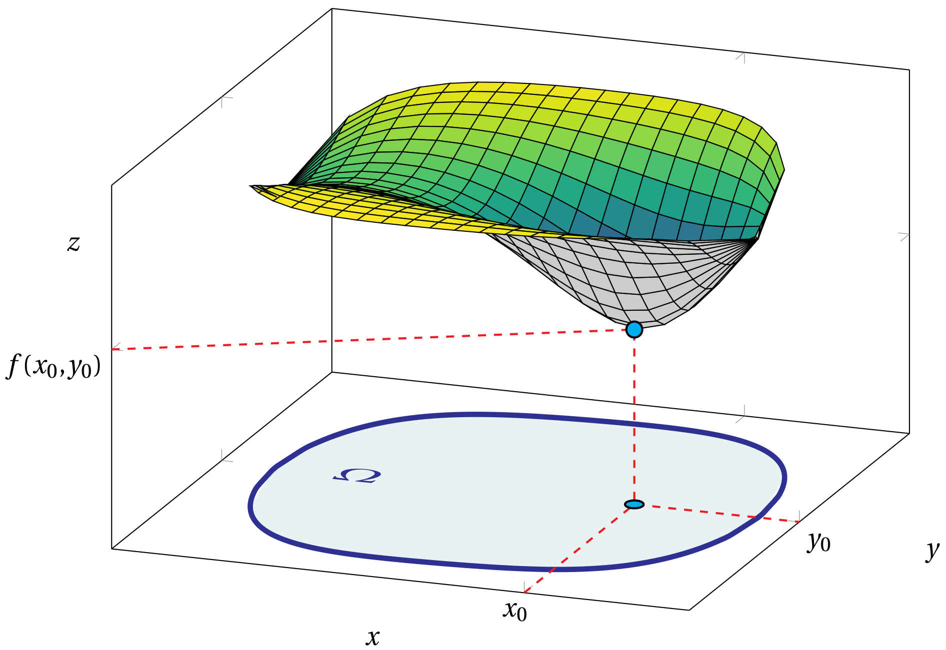
Rappel

On peut représenter graphiquement toute fonction de deux variables à valeurs réelles par une surface.

Définition (Surface représentative) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application où Ω est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. On appelle surface représentative de l'application f l'ensemble

$$\mathscr{S}_f = \left\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega\right\}.$$

Illustration : On peut tracer la surface représentative d'une fonction de deux variables.



Partie I Calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables

I.A - Dérivées partielles d'ordre 1

Pour définir la notion de dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables, on se ramène à utiliser la notion de dérivée pour les fonction d'une variable.

Définition (Dérivée en un point selon un vecteur) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^p$.
On appelle dérivée de f en un point intérieur $a \in \Omega$ selon le vecteur $v \in \mathbb{R}^p$, sous réserve d'existence, le nombre

$$D_v f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Remarques 1 :

a) La dérivée de la fonction f au point a selon le vecteur $0_{\mathbb{R}^p}$ est nulle.

b) La dérivée de la fonction f au point a selon un vecteur $v \in \mathbb{R}^p$ est par définition la dérivée en 0 de la fonction vectorielle $t \mapsto f(a+tv)$.

Exercice 1 : On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

1) Montrer que f admet des dérivées suivant tout vecteur en $(0,0)$.

2) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Dans la suite de cette partie, on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Définition (Dérivées partielles d'ordre 1) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^p$.
On appelle dérivée partielle d'ordre 1 de la fonction f en un point intérieur $a \in \Omega$ par rapport à la i-ème variable où $i \in [\![1,p]\!]$, sous réserve d'existence, le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}.$$

Remarques 2 :

a) La i-ème dérivée partielle de la fonction f est par définition la dérivée de f selon le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

b) La dérivée partielle d'ordre 1 de f au point $a = (a_1, \dots, a_p) \in \Omega$ par rapport à la i-ème variable est par définition la dérivée en a_i de la fonction d'une variable

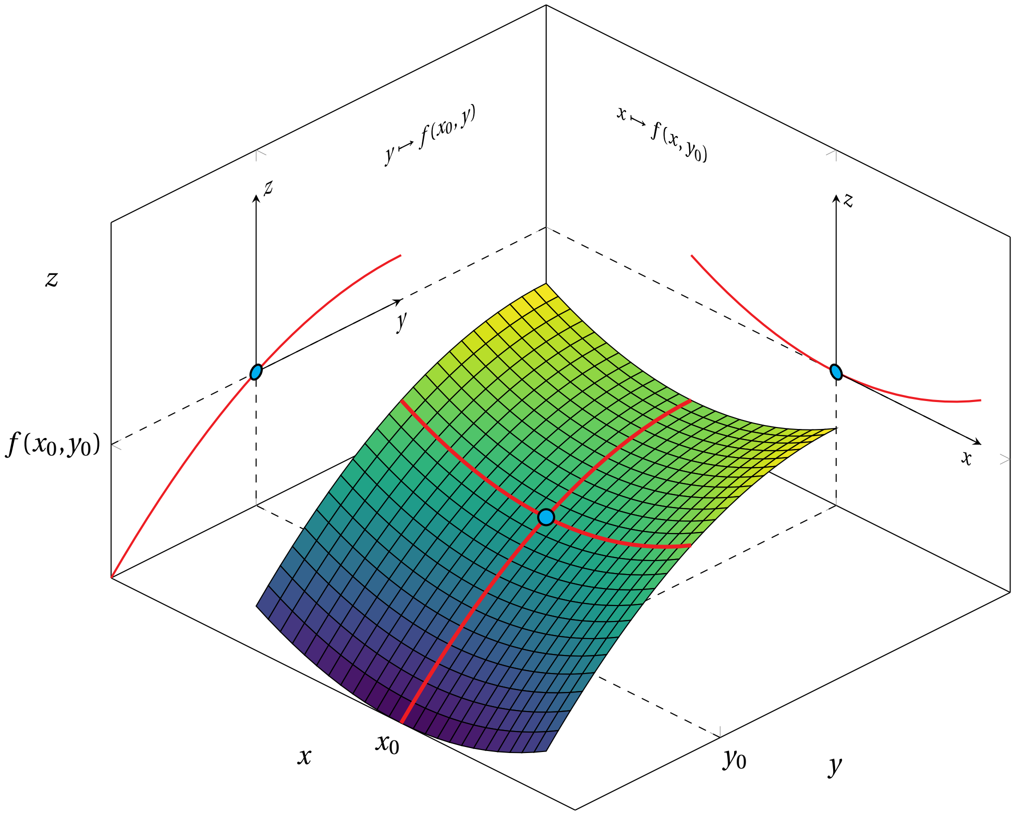
$$x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_p).$$

En conséquence, pour justifier l'existence et calculer les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables, on peut utiliser les règles usuelles pour une fonction d'une variable.

c) Dans le cas où $p = 2$, les dérivées partielles d'ordre 1 sont notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Par définition, pour tout point $a = (x_0, y_0) \in U$, on a sous réserve d'existence des limites que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0,y_0)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0,y_0)}{t}.$$

Illustration : On considère la surface représentative d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en un point $(x_0, y_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles de la fonction f au point (x_0, y_0) sont les dérivées des fonctions réelles d'une variable $x \mapsto f(x, y_0)$ en x_0 et $y \mapsto f(x_0, y)$ en y_0 tracées ci-dessous.



Exemple 1 : On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f : (x, y) \mapsto 3x^2y + 2x + \sin(y)$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la dérivée partielle de f par rapport à la première variable existe et on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy + 2.$$

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la dérivée partielle de f par rapport à la seconde variable existe et on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 + \cos(y).$$

Exercice 2 : On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/4}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) La fonction f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?

Définition (Fonction de classe $\mathscr{C}^1$) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent en tout point de U et si elles sont continues sur U.

Proposition (Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$) : Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonction $f + \lambda g$ et fg sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

(ii) Si la fonction g ne s'annule pas sur U, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

(iii) La composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Exemples 2 :

a) Les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

b) Les fonctions rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leur ensemble de définition.

Exercice 3 : Montrer que l'application f définie ci-dessous de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4 : Étudier si l'application f définie ci-dessous est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
Pour tout point $a \in U$ et tout $v = (v_1, \ldots, v_p) \in \mathbb{R}^p$, on a

$$f(a+v) \underset{v \to 0_{\mathbb{R}^p}}{=} f(a) + \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, v_k \right) + o\big(\|v\|\big).$$

Remarques 3 :

a) On en déduit que si une fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors f est continue sur U.

b) Si $g : U \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et si $\lambda : U \to \mathbb{R}$ est une fonction ne s'annulant pas sur un voisinage d'un point $a \in U$ sauf éventuellement en a, alors on dit que g est négligeable devant λ en $a \in I$, ce que l'on note $g(x) \underset{x \to a}{=} o\big(\lambda(x)\big)$, si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{g(x)}{\lambda(x)} = 0.$$

c) Le choix de la norme $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^p$ est sans importance : comme $\mathbb{R}^p$ est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^p$.

Définition (Différentielle en un point) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. La différentielle de f en un point $a \in U$ est l'application linéaire $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall v = (v_1, \ldots, v_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \mathrm{d}f(a)(v) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, v_i.$$

Remarques 4 :

a) Pour tout $a \in U$ et tout $v \in \mathbb{R}^p$, on peut également utiliser la notation $\mathrm{d}f(a) \cdot v = \mathrm{d}f(a)(v)$.

b) Pour tout point $a \in U$ et tout $v = (v_1, \ldots, v_p) \in \mathbb{R}^p$, la formule de Taylor se réécrit

$$f(a+v) \underset{v \to 0_{\mathbb{R}^p}}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a)(v) + o\big(\|v\|\big).$$

c) Si $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, alors la fonction f admet une dérivée en tout point $a \in U$ et selon tout vecteur $v \in \mathbb{R}^p$ et on a l'égalité

$$\forall a \in U, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p, \quad D_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v).$$

Dans la fin de cette partie, on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$. Pour tout point $a \in U$, comme l'application $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est linéaire, alors par le théorème de représentation des formes linéaires d'un espace euclidien, il existe un unique vecteur $w_a \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\forall v \in \mathbb{R}^p, \quad \mathrm{d}f(a)(v) = \langle w_a \mid v \rangle.$$

Définition (Gradient) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Le gradient de f en un point $a \in U$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^p$, noté $\nabla f(a)$ vérifiant

$$\forall v \in \mathbb{R}^p, \quad \mathrm{d}f(a)(v) = \big\langle \nabla f(a) \mid v \big\rangle.$$

Remarque 5 : En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la relation dans la définition ci-dessus, on en déduit que le gradient $\nabla f(a)$ donne la direction dans laquelle la variation de f est la plus forte au voisinage du point $f(a)$.

Proposition 1 : Si $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, alors

$$\forall a \in U, \quad \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right) \in \mathbb{R}^p.$$

Exemple 3 : L'application $f : (x, y) \mapsto xy$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a $\nabla f(x, y) = (y, x)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

I.B - Dérivées partielles d'une composée

Théorème (Règle de la chaîne) : Soit $\gamma = (x_1, \dots, x_p) : I \to \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ telle que $\gamma(I) \subset U$, alors la fonction

$$F = (f \circ \gamma) : I \to \mathbb{R}, \quad F : t \mapsto (f \circ \gamma)(t) = f\big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$, on a

$$F'(t) = \big\langle \nabla f\big(\gamma(t)\big) \mid \gamma'(t)\big\rangle = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big)\, x_k'(t).$$

Remarques 6 :

a) Lorsque $p = 1$, on retrouve la formule habituelle pour la dérivée d'une composée de fonctions d'une variable.

b) La formule précédente peut aussi s'interpréter comme la dérivée de la fonction f le long de la courbe paramétrée par γ.

Exemple 4 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. En appliquant le théorème précédent, on obtient que l'application $F : t \mapsto f\left(t^2, t^3\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F'(t) = 2t \frac{\partial f}{\partial x}\left(t^2, t^3\right) + 3t^2 \frac{\partial f}{\partial y}\left(t^2, t^3\right).$$

Corollaire 1 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^p$.
La fonction f est constante sur U si et seulement si $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^p}$ pour tout $a \in U$.

Corollaire 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une application $\varphi = (x_1, \dots, x_p) : O \to \mathbb{R}^p$ définie sur un ouvert O de $\mathbb{R}^n$ telle que les applications $x_1, \dots, x_n : O \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur O. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ telle que

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in O, \quad \varphi(u_1, \dots, u_n) = \big(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)\big) \in U,$$

alors la fonction

$$F = (f \circ \varphi) : O \to \mathbb{R}, \quad F : (u_1, \dots, u_n) \mapsto (f \circ \varphi)(u_1, \dots, u_n) = f\big(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur O et pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in O$ et tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(\varphi(u_1, \dots, u_n)\big) \frac{\partial x_k}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_n).$$

Remarque 7 : Lorsque $n = 2$, on a en notant $(x, y) = (x_1, x_2)$ avec les hypothèses ci-dessus que la fonction

$$F : O \to \mathbb{R}, \quad F : (u, v) \mapsto f\big(x(u, v), y(u, v)\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur O et pour tout $(u, v) \in O$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u, v), y(u, v)\big) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u, v), y(u, v)\big) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v),$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u, v), y(u, v)\big) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u, v), y(u, v)\big) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v).$$

Exemple 5 (Transformation linéaire) : Si on écrit $x = au + bv$ et $y = cu + dv$ avec un quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, alors on a les dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = c, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = b, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = d.$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, alors la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad F(u, v) = f(\underbrace{au + bv}_{x}, \underbrace{cu + dv}_{y})$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = a\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + c\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = b\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + d\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Exemple 6 (Coordonnées polaires) : Si on écrit $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, alors on a les dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta), \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta), \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta), \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta).$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors la fonction $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad F(r, \theta) = f\big(\underbrace{r\cos(\theta)}_{x}, \underbrace{r\sin(\theta)}_{y}\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = f(a + t, b + t) - f(a, b).$$

2. Montrer que la fonction f vérifie la relation

$$\forall (a, b, t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(a + t, b + t) = f(a, b).$$

si et seulement si f est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

I.C - Dérivées partielles d'ordre 2

Définition (Dérivées partielles 2) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
Les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f sont, sous réserve d'existence, les dérivées partielles d'ordre 1 des applications $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}$.

Notation : La fonction $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \partial_i(\partial_j f)$ est la i-ème dérivée partielle de la j-ème dérivée partielle de f. On la note plus simplement $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ou $\partial_{i,j} f$.

Remarque 8 : Dans le cas où $p = 2$, les dérivées partielles d'ordre 2 sont notées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Définition (Fonction de classe $\mathscr{C}^2$) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U si ses dérivées partielles d'ordre 2 existent en tout point de U et si elles sont continues sur U.

Proposition (Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$) : Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonction $f + \lambda g$ et fg sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

(ii) Si la fonction g ne s'annule pas sur U, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

(iii) La composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.

Exemples 7 :

a) Les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$.

b) Les fonctions rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur leur ensemble de définition.

Théorème de Schwarz : Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

DÉMONSTRATION HORS PROGRAMME

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
3. L'application f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7 : Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$(i)\ \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\mathrm{e}^{xy}+3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}, \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^{x}y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^{x}+2y, \end{cases}$$

$$(iii)\ \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy), \end{cases} \qquad (iv)\ \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^{x}+y\cos(xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy). \end{cases}$$

Définition (Matrice hessienne) : Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
La matrice hessienne de f au point $a\in U$ est la matrice $H_f(a)=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$.

Remarque 9 : En particulier, pour $p=2$ et $a=(x_0,y_0)\in U$, on a

$$H_f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

On déduit du théorème de Schwarz que la matrice hessienne $H_f(x_0,y_0)$ est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par le théorème spectral.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
Pour tout point $a\in U$ et tout $v=(v_1,\dots,v_p)\in\mathbb{R}^p$, on a

$$\begin{aligned} f(a+v) &\underset{v\to 0_{\mathbb{R}^p}}{=} f(a)+\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)v_k\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)v_iv_j\right)+o\left(\|v\|^2\right) \\ &\underset{v\to 0_{\mathbb{R}^p}}{=} f(a)+\nabla f(a)^\top v+\frac{1}{2}v^\top H_f(a)v+o\left(\|v\|^2\right). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION HORS PROGRAMME

Remarques 10 :

a) Dans la seconde formule ci-dessous, on regarde les vecteurs de $\mathbb{R}^p$ comme des matrices colonnes de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

b) En notant $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^p$, la formule ci-dessus se réécrit

$$f(a+v)\underset{v\to 0_{\mathbb{R}^p}}{=} f(a)+\langle\nabla f(a)\mid v\rangle+\frac{1}{2}\langle\nabla H_f(a)v\mid v\rangle+o\left(\|v\|^2\right).$$

I.D - Méthode - Résoudre une équation aux dérivées partielles

Il n'y a pas de méthode générale de résolution pour les équations aux dérivées partielles. On utilise souvent des changements de variable qui sont donnés dans les énoncés. Nous allons traiter plusieurs exemples.

Exemple 8 (Transformation affine) : On souhaite déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=f. \qquad (E)$$

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, on utilise le changement de variable

$$(u,v)=(x+y,x-y) \quad\Leftrightarrow\quad (x,y)=\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right).$$

D'après le théorème de dérivation d'une composée, la fonction $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad F(u,v)=f\Big(\underbrace{\frac{u+v}{2}}_{x},\underbrace{\frac{u-v}{2}}_{y}\Big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).$$

On en déduit que f est solution de (E) si et seulement la fonction F vérifie

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{1}{2}F.$$

En remarquant que cette dernière est une équation différentielle d'ordre 1 en la variable u, on en déduit que f est solution de (E) si et seulement si il existe une fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad F(u,v)=h(v)\exp\left(\frac{u}{2}\right).$$

Finalement, on conclut que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$f:(x,y)\mapsto h(x-y)\exp\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

où $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 8 : Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x}-3\frac{\partial f}{\partial y}=0. \qquad (E)$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u,v)=(2x+y,3x+y)$.

Exemple 9 (Coordonnées polaires) : On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (E)$$

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, on utilise les coordonnées polaires $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. D'après le théorème de dérivation d'une composée, la fonction $F : \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad F(r,\theta) = f\big(\underbrace{r\cos(\theta)}_{x}, \underbrace{r\sin(\theta)}_{y}\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)\\ &= \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).\end{aligned}$$

On en déduit que f est solution de (E) si et seulement la fonction F vérifie

$$r\frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 0.$$

Ainsi, la fonction f est solution de (E) si et seulement si il existe $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad F(r,\theta) = g(\theta).$$

Comme $\theta = \operatorname{Arctan}(y/x)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on conclut que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$f : (x, y) \longmapsto g\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

où $g :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 9 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = f. \qquad (E)$$

On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exemple 10 (Une équation aux dérivées partielles d'ordre 2) : On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \qquad (E)$$

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, on utilise le changement de variable

$$(u, v) = (x, x + y) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (u, v - u).$$

D'après le théorème de dérivation d'une composée, la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad F(u, v) = f(\underbrace{u}_{x}, \underbrace{v - u}_{y})$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

En appliquant une seconde fois la formule de dérivation, on obtient que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u, v) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).\end{aligned}$$

On en déduit que f est solution de (E) si et seulement la fonction F vérifie

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0.$$

Ainsi, la fonction f est solution de (E) si et seulement si il existe deux fonctions $h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad F(u, v) = h(v)u + k(v).$$

Finalement, on conclut que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$f : (x, y) \mapsto h(x + y)x + k(x + y).$$

où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

Exercice 10 - Équation des ondes : Soit $c \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u, v) = (x + ct, x - ct)$.

Partie II Extremums d'une fonction de plusieurs variables

II.A - Généralités

Définition (Extremum global) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^p$.

(i) On dit que la fonction f admet un maximum global en un point $a \in \Omega$ et que $f(a)$ est le maximum global de la fonction f si $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in \Omega$.

(ii) On dit que la fonction f admet un minimum global en un point $a \in \Omega$ et que $f(a)$ est le minimum global de la fonction f si $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout $x \in \Omega$.

(iii) On dit que la fonction f admet un extremum global en un point $a \in \Omega$ et que $f(a)$ est un extremum global de la fonction f si elle admet un maximum global ou un minimum global en a.

Définition (Extremum local) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^p$.

(i) On dit que la fonction f admet un maximum local en un point $a \in \Omega$ et que $f(a)$ est un maximum local de la fonction f s'il existe un réel $r > 0$ tel que

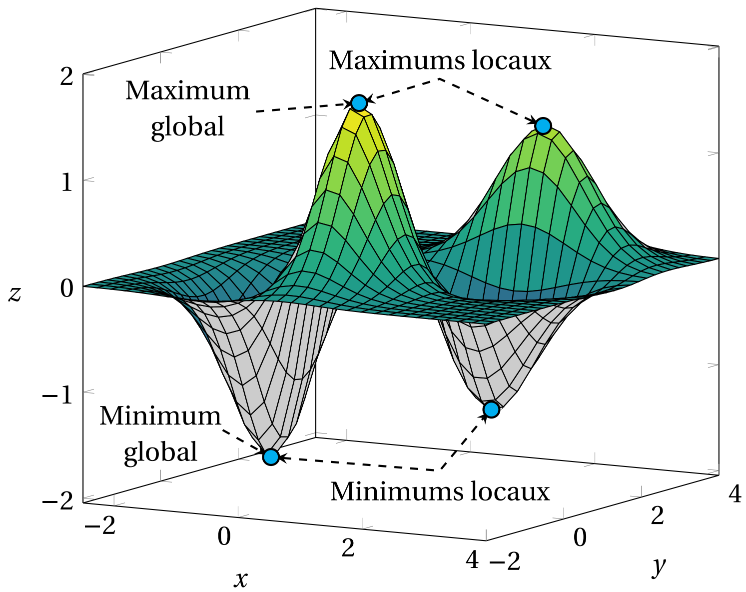
$$\forall x \in B\big(a, r\big) \cap \Omega, \quad f(x) \leqslant f(a).$$

(ii) On dit que la fonction f admet un minimum local en un point $a \in \Omega$ et que $f(a)$ est un minimum local de la fonction f s'il existe un réel $r > 0$ tel que

$$\forall x \in B\big(a, r\big) \cap \Omega, \quad f(x) \geqslant f(a).$$

(iii) On dit que f admet un extremum local en un point $a \in \Omega$ et que $f(a)$ est un extremum local de la fonction f si elle admet un maximum local ou un minimum local en a.

Illustration : Pour $p = 2$, on peut repérer les extremums d'une fonction sur sa surface représentative.



Remarques 11 :

a) Un extremum global est aussi un extremum local.

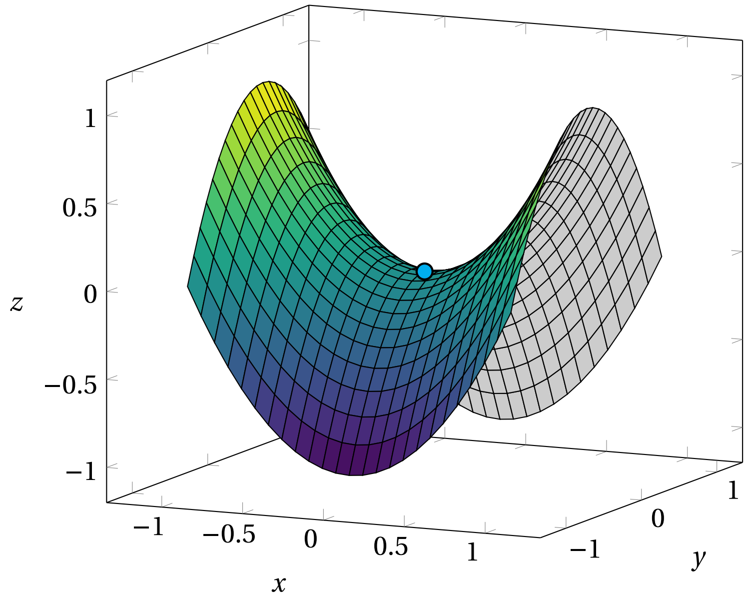
b) La réciproque de cette propriété est fausse comme on peut l'observer sur la surface précédente.

Définition (Point critique) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
On dit que $a \in U$ est un point critique de f si le gradient $\nabla f(a)$ est nul.

Exemple 11 : La fonction $f : (x, y) \mapsto xy$ admet $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ pour unique point critique.

Proposition 2 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si f admet un extremum local en un point $(x_0, y_0) \in U$, alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

ATTENTION : La réciproque de la proposition précédente est fausse. Par exemple, si on considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$, alors $(0,0)$ est un point critique de f, mais f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$. On peut tracer la surface représentative de f.



Théorème 1 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On suppose que f admet un point critique $a \in U$.

(i) Si $H_f(a)$ est définie positive (i.e. $\mathrm{Sp}\left(H_f(a)\right) \subset \mathbb{R}_+^*$), alors f admet un minimum local (strict) en a.

(ii) Si $H_f(a)$ est définie négative (i.e. $\mathrm{Sp}\left(H_f(a)\right) \subset \mathbb{R}_-^*$), alors f admet un maximum local (strict) en a.

(iii) Si $H_f(a)$ n'est pas positive (i.e. $\mathrm{Sp}\left(H_f(a)\right) \not\subset \mathbb{R}_+$), alors f n'admet pas de minimum en a.

(iv) Si $H_f(a)$ n'est pas négative (i.e. $\mathrm{Sp}\left(H_f(a)\right) \not\subset \mathbb{R}_-$), alors f n'admet pas de maximum en a.

Remarques 12 :

a) Avec les notations du théorème ci-dessus, si $H_f(a)$ n'est ni positive ni négative, alors f n'admet pas d'extremum local en a. Dans ce cas, on dit que a est un point col ou point selle de f.

b) Si f admet un maximum local en $a \in U$, on dit que ce maximum local est strict s'il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, r) \cap U$ avec $x \neq a$, on a $f(x) < f(a)$.

c) Si f admet un minimum local en $a \in U$, on dit que ce minimum local est strict s'il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, r) \cap U$ avec $x \neq a$, on a $f(x) > f(a)$.

Dans le cas $p=2$, en notant $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de la matrice symétrique réelle $H_f(a)$, alors nous savons que $\det\big(H_f(a)\big)=\lambda\mu$ et que $\operatorname{tr}\big(H_f(a)\big)=\lambda+\mu$, nous pouvons reformuler le résultat précédent avec le déterminant et la trace de la matrice hessienne de f au point a.

Corollaire 3 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On suppose que f admet un point critique $a \in U$.

(i) Si $\det\big(H_f(a)\big)>0$ et $\operatorname{tr}\big(H_f(a)\big)>0$, alors f admet un minimum local (strict) en a.

(ii) Si $\det\big(H_f(a)\big)>0$ et $\operatorname{tr}\big(H_f(a)\big)<0$, alors f admet un maximum local (strict) en a.

(iii) Si $\det\big(H_f(a)\big)<0$, alors f admet un point col en a.

ATTENTION : Dans le cas $p=2$ si au moins une des valeurs propres de la matrice $H_f(a)$ est nulle, le corollaire ci-dessus ne permet pas de conclure.

Exemple 12 : On souhaite étudier les extremums de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

L'application f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur la partie ouverte $\mathbb{R}^2$. D'après la proposition 2, les extremums se trouvent en des points critiques de f. Un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f si et seulement si

$$\nabla f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x^3 - 4y & = 0 \\ 4y^3 - 4x & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y & = x^3 \\ x^9 & = x. \end{cases}$$

On en déduit que les points critiques de f sont $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$. La matrice hessienne de f en (x_0,y_0) est

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 12x_0^2 & -4 \\ -4 & 12y_0^2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

- En $(x_0,y_0)=(0,0)$, on a $\det\big(H_f(x_0,y_0)\big) = -16 < 0$, donc f admet un point col en $(0,0)$.
- En $(x_0,y_0)=\pm(1,1)$, on a $\det\big(H_f(x_0,y_0)\big) = 128 > 0$ et $\operatorname{tr}\big(H_f(x_0,y_0)\big) = 24 > 0$, donc f admet un minimum local en $\pm(1,1)$. La valeur de ce minimum local est $f(1,1) = f(-1,-1) = -2$.

De plus, on remarque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que

$$f(x,y) - f(\pm 1, \pm 1) = x^4 + y^4 - 4xy + 2 = (x^2-1)^2 + (x^2-1)^2 + 2(x-y)^2 \geqslant 0,$$

donc f admet un minimum global en $\pm(1,1)$.

Exercice 11 : On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : (x,y,z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz.$$

1. Déterminer les extremums locaux de f et leur nature.
2. L'application f admet-elle un extremum global ?

Exercice 12 - Régression linéaire : Soient $\big((x_1,y_1),\dots,(x_p,y_p)\big) \in \big(\mathbb{R}^2\big)^p$ tel que $x_1,\dots,x_p$ ne soient pas tous égaux. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : (a,b) \longmapsto \sum_{k=1}^{p} (y_k - a x_k - b)^2$$

1. Montrer que f admet un unique point critique $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet un minimum global en $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

II.B - Méthode - Extremums globaux d'une fonction de deux variables

On considère une application $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue sur une partie non vide, fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intérieur U de la partie Ω. La méthode ci-dessous permet de déterminer les extremums globaux de l'application f sur Ω.

1) On vérifie que Ω est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ et que f est une application continue, ce qui justifie que f admet un maximum et un minimum sur Ω par le théorème des bornes atteintes.
2) En notant U l'intérieur de Ω, on justifie que l'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U. On détermine les points critiques de l'application $f : U \to \mathbb{R}$, puis on calcule l'image par f de chacun de ces points.
3) On détermine les extremums de f sur le bord $\Omega \setminus U$ de Ω en se ramenant à l'étude de fonctions à une variable.
4) On conclut en comparant les différentes valeurs candidates de f calculées précédemment.

Exemple 13 : On souhaite déterminer le maximum de la fonction $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

1) La fonction f est continue sur $\Omega = [0,1]^2$ qui est fermée et bornée, donc elle admet un maximum sur $[0,1]^2$ par le théorème des bornes atteintes.
2) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $U =]0,1[^2$. Les points critiques de f sur U sont les solutions de

$$\nabla f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{1-2xy-x^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)} & = & 0 \\ \dfrac{1-2xy-y^2}{(1+x^2)(1+y^2)^2} & = & 0. \end{array} \right.$$

Ce système admet le couple $\left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)$ comme unique solution dans $U =]0,1[^2$, donc c'est le seul point critique de l'application f dans U. La valeur de f en ce point est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3) Les points du bord $B = \Omega \setminus U$ de Ω s'écrivent sous la forme $(0,t)$, $(t,0)$, $(1,t)$ ou $(t,1)$ avec $t \in [0,1]$. On en déduit que les valeurs prises par l'application f sur le bord B sont exactement les valeurs prises sur $[0,1]$ par les fonctions

$$h_1 : t \mapsto f(0,t), \quad h_2 : t \mapsto f(t,0), \quad h_3 : t \mapsto f(1,t) \quad \text{et} \quad h_4 : t \mapsto f(t,1).$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a les expressions

$$h_1(t) = h_2(t) = \frac{t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad h_3(t) = h_4(t) = \frac{1+t}{2(1+t^2)}.$$

En effectuant des études de fonctions d'une variable, on obtient les tableaux de variations suivants.

t	0		1
h_1	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

t	0		$\sqrt{2}-1$		1
h_3	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}+1}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

On en déduit que le maximum de f sur le bord B de Ω est

$$\max_B(f) = \max\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

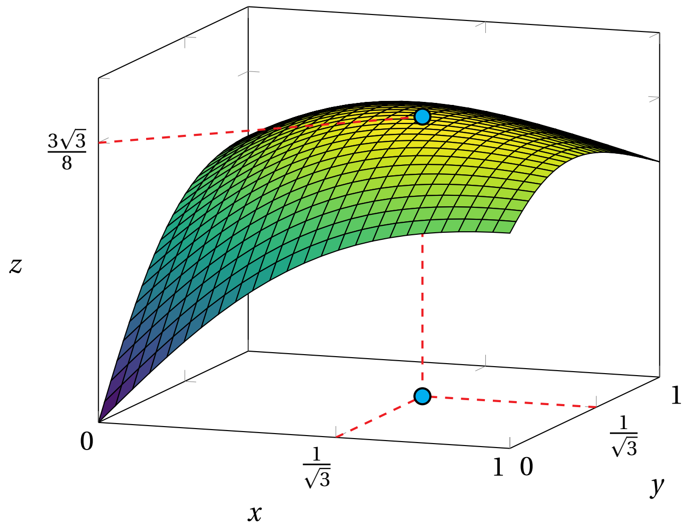
et qu'il est atteint aux points $\left(\sqrt{2}-1, 1\right)$ et $\left(1, \sqrt{2}-1\right)$.

4) On conclut que le maximum de f sur $\Omega = [0,1]^2$ est

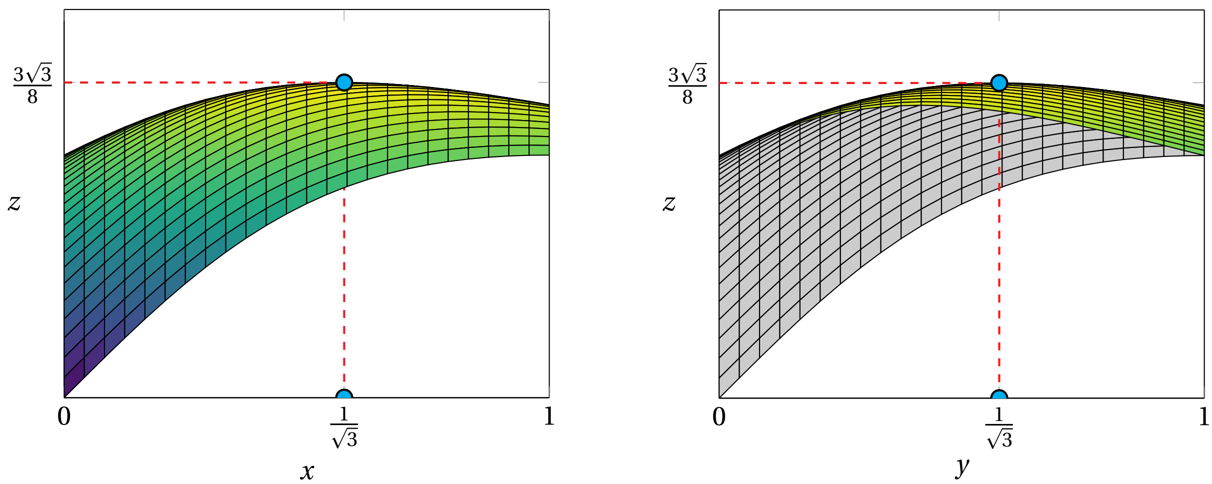
$$\max_{\Omega}(f) = \max\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{2}+1}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

et qu'il est atteint au point $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

On peut tracer la surface représentative de la fonction f.



Il n'est pas évident d'observer sur le graphique ci-dessus que la valeur que nous avons trouvée est bien le maximum de la fonction f. Il est plus facile de le constater en utilisant les deux angles de vue suivants.



Exercice 13 : Déterminer les extremums globaux de la fonction $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : (x,y) \mapsto 2x^2 + 2y^2 - xy - x - y.$$

Partie III Applications géométriques

III.A - Courbes planes définies par une équation cartésienne

Dans cette sous-partie, on considère une application $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Définition (Courbe plane implicite) : La courbe plane implicite d'équation cartésienne $g(x, y) = 0$ est l'ensemble des points $(x, y) \in U$ vérifiant $g(x, y) = 0$.

Exemples 14 :

a) Si $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une application $h : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation $y - h(x) = 0$.

b) Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R > 0$ est la courbe d'équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$.

Remarques 13 :

a) Cette définition est un peu trop générale, mais elle a le mérite d'être simple et on s'en contentera à notre niveau. Par exemple, si on considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, alors la courbe implicite d'équation $g(x, y) = 0$ est réduite au seul point $(0, 0)$, ce qui n'est pas très satisfaisant pour une courbe.

b) Une courbe peut être décrite par différentes équations cartésiennes. Par exemple la droite d'équation $x + y = 0$ admet aussi $(x + y)^2 = 0$ comme équation cartésienne.

Définition (Point régulier) : Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $g(x, y) = 0$. Un point $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$ est dit régulier si

$$\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0).$$

Dans le cas contraire, on dit que le point $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$ est singulier.

Exemple 15 : On considère la courbe plane $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne

$$\underbrace{x^3 + y^3 - 3xy}_{g(x,y)} = 0.$$

Un point $(x, y) \in \mathscr{C}$ est singulier si et seulement si

$$\nabla g(x, y) = (0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x^2 - 3y & = & 0 \\ 3y^2 - 3x & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ x^4 - x & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ x(x-1)(x^2 + x + 1) & = & 0. \end{array} \right.$$

Les solutions du système ci-dessus sont $\{(0, 0), (1, 1)\}$, mais comme $(0, 0) \in \mathscr{C}$ et $(1, 1) \notin \mathscr{C}$, on conclut que $(0, 0)$ est l'unique point singulier de la courbe $\mathscr{C}$.

Remarque 14 : On admet le théorème des fonctions implicites (hors-programme) : si $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$ est un point régulier de la courbe, alors $\mathscr{C}$ est le graphe d'une application au voisinage du point (x_0, y_0). Plus précisément, il existe deux intervalles ouverts I et J de $\mathbb{R}$ tels que $(x_0, y_0) \in I \times J \subset U$ et

- soit il existe une application $\varphi_1 : I \to J$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

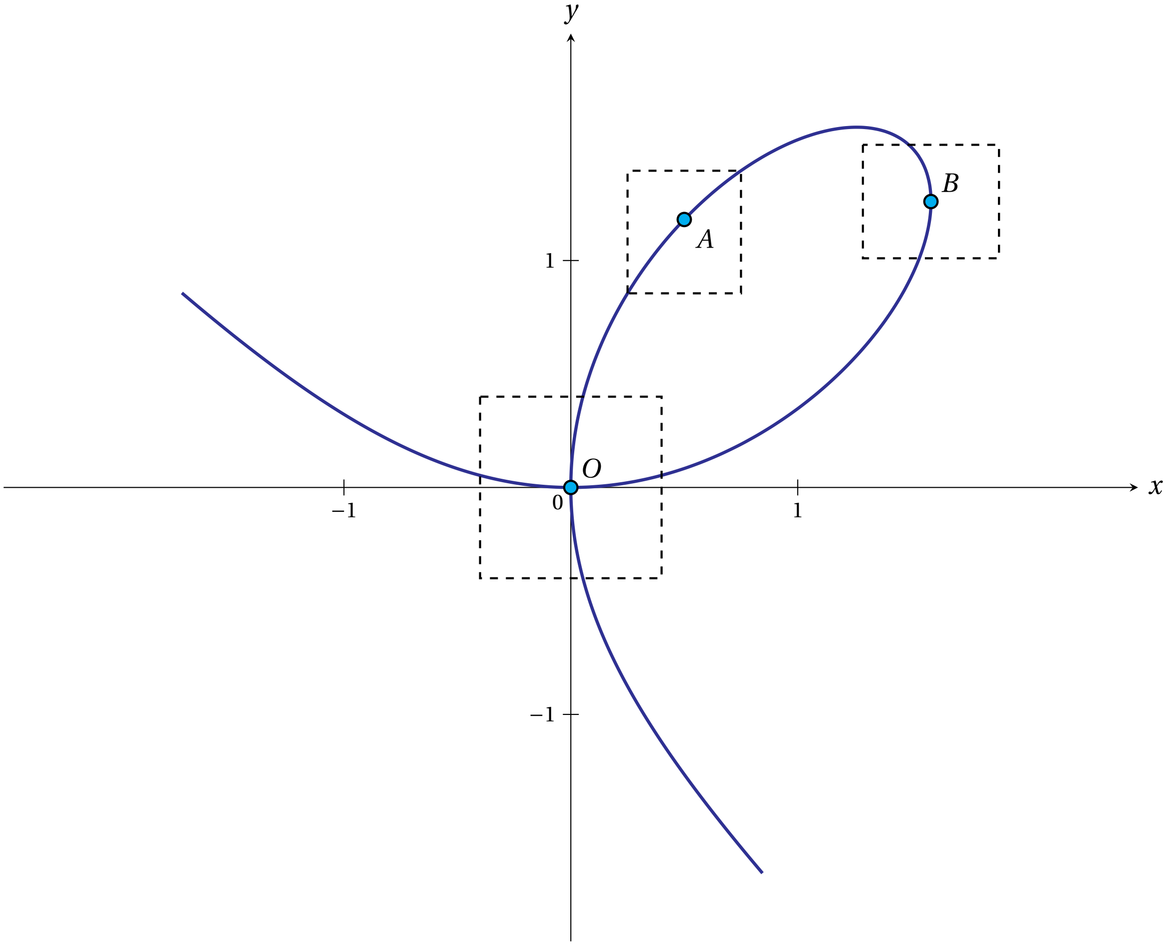
$$\forall (x, y) \in I \times J, \quad \big(\ f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi_1(x) \ \big).$$

- soit il existe une application $\varphi_2 : J \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (x, y) \in I \times J, \quad \big(\ f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \varphi_2(y) \ \big).$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente au point (x_0, y_0).

Illustration : On peut tracer la courbe $\mathscr{C}$ de l'exemple précédent dont d'équation cartésienne est $x^3+y^3-3xy=0$.



On observe sur la courbe que

- au voisinage du point régulier A de $\mathscr{C}$, on peut exprimer y en fonction de x ou x en fonction de y ;
- au voisinage du point régulier B de $\mathscr{C}$, on peut exprimer x en fonction de y ;
- au voisinage du point singulier O de $\mathscr{C}$, il n'est pas possible d'exprimer y en fonction de x et il n'est pas possible d'exprimer x en fonction de y.

Théorème (Tangente en un point régulier) : Soit $\mathscr{C}$ la courbe implicite d'équation $g(x,y)=0$.
Si $(x_0,y_0)\in\mathscr{C}$ est un point régulier de la courbe $\mathscr{C}$, alors la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente en (x_0,y_0) dont un vecteur normal est $\nabla g(x_0,y_0)$.

Remarque 15 : Si le point $M(x_0,y_0)$ est un point régulier de la courbe d'équation $g(x,y)=0$, on en déduit une équation cartésienne de la tangente $\mathscr{T}$ en (x_0,y_0) avec les équivalences

$$\begin{aligned}
A(x,y)\in\mathscr{T} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{MA} \mid \nabla g(x_0,y_0)\right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.
\end{aligned}$$

Exemple 16 : On considère la courbe plane $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne

$$\underbrace{x^3+y^3-3xy}_{g(x,y)}=0.$$

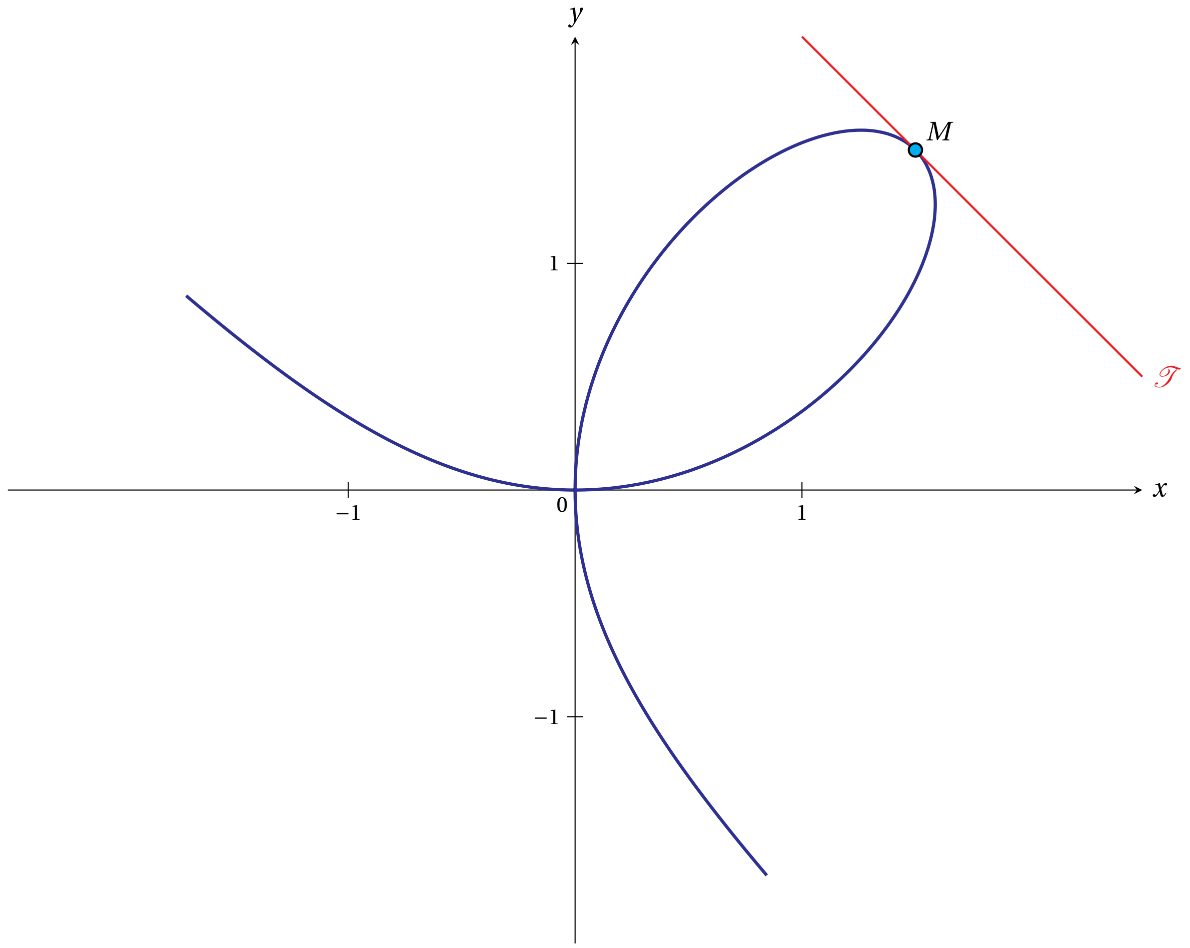
On remarque que $g\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=0$, donc le point M de coordonnées $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ appartient à $\mathscr{C}$. Nous avons vu précédemment que le seul point singulier de la courbe $\mathscr{C}$ est $(0,0)$, donc M est un point régulier de la courbe et on a

$$\nabla g\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\neq 0_{\mathbb{R}^2}.$$

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet une tangente $\mathscr{T}$ au point M dont un vecteur normal est $(1,1)$. Une équation cartésienne de $\mathscr{T}$ est

$$\left\langle \begin{pmatrix}x-\frac{3}{2}\\ y-\frac{3}{2}\end{pmatrix} \,\middle|\, \nabla g\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\right\rangle=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left\langle \begin{pmatrix}x-\frac{3}{2}\\ y-\frac{3}{2}\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0 \quad\Leftrightarrow\quad x+y-3=0.$$

On peut représenter la courbe et sa tangente sur le graphique ci-dessous.



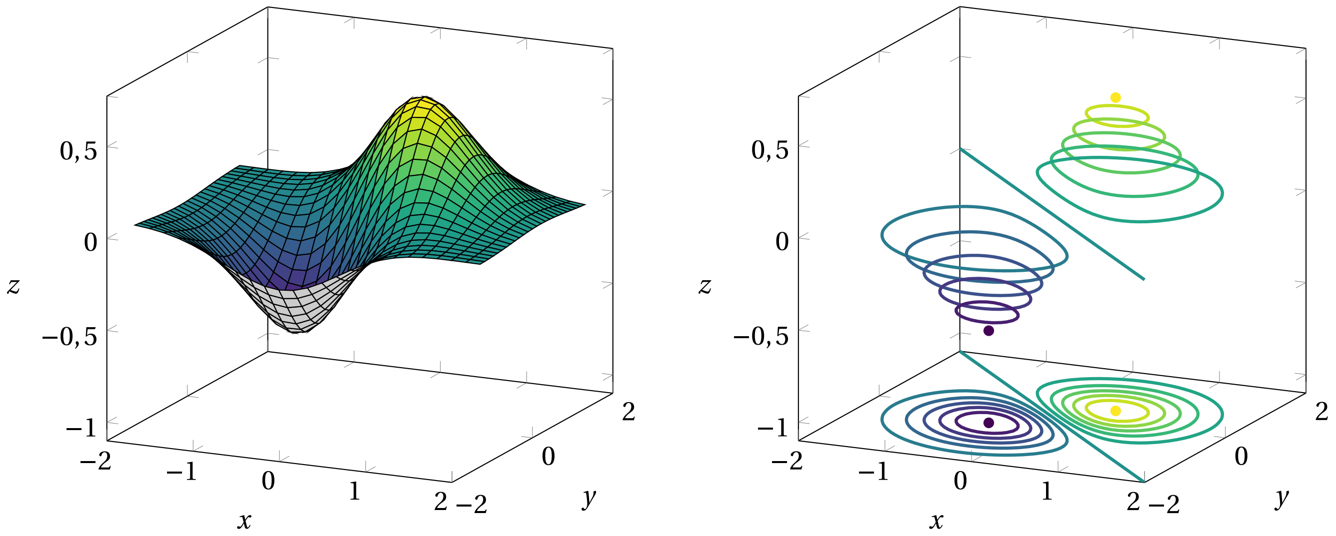
Exercice 14 - Ellipse : Soient $a,b>0$. Soit $\mathscr{C}$ la courbe plane d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{C}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathscr{C}$.

Définition (Ligne de niveau) : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points $(x, y) \in U$ vérifiant la relation $g(x, y) = \lambda$ est appelé ligne de niveau λ de l'application g.

Exemple 17 : On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g : (x, y) \mapsto (x + y)\exp\left(-x^2 - y^2\right)$.
On peut tracer la surface représentative de la fonction g et ses lignes de niveau.



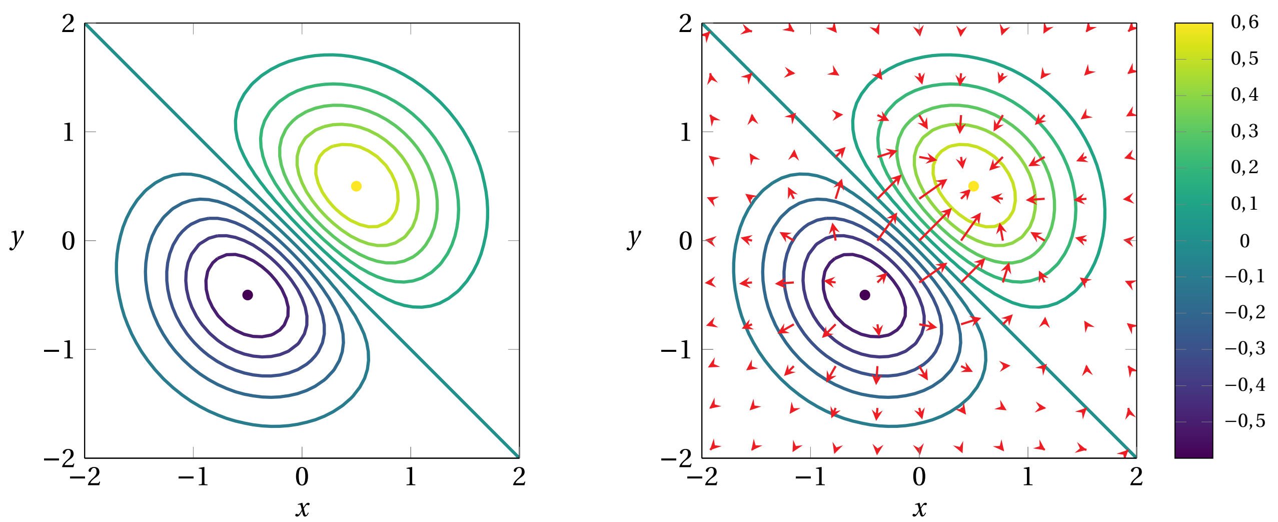
Remarques 16 :

a) Les lignes de niveau sont utilisées sur les cartes topographiques. L'altitude est constante le long de chacune des lignes sur ces dernières, ce qui permet de représenter le relief.

b) On retrouve également les lignes de niveau sur les cartes de pression atmosphérique utilisées en météorologie. La pression est constante le long de chacune des lignes sur ces dernières.

Proposition 3 : Le gradient de g est orthogonal aux lignes de niveau de g et il est orienté dans le sens des valeurs croissantes de g.

Exemple 18 : On peut placer quelques vecteurs gradients sur les lignes de niveau de l'exemple précédent.



Exercice 15 : Représenter quelques lignes de niveau et quelques gradients de $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x$.

III.B - Surfaces de l'espace définies par une équation cartésienne

Dans cette sous-partie, on considère une application $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$.

Définition (Surface implicite de l'espace) : La surface implicite de l'espace d'équation $g(x, y, z) = 0$ est l'ensemble des points $(x, y, z) \in U$ vérifiant $g(x, y, z) = 0$.

Exemples 19 :

a) Si $\mathscr{S}$ est la surface représentative d'une application $h : O \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors $\mathscr{S}$ est la surface d'équation $z - h(x, y) = 0$.

b) La sphère de centre $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et de rayon $R > 0$ est la surface d'équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0.$$

Remarques 17 :

a) Cette définition est un peu trop générale, mais elle a le mérite d'être simple et on s'en contentera à notre niveau. Par exemple, si on considère la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2$, alors la surface implicite d'équation $g(x, y, z) = 0$ est une droite, ce qui n'est pas très satisfaisant pour une surface.

b) Une surface peut être décrite par différentes équations cartésiennes. Par exemple le plan d'équation $x + z = 0$ admet aussi $(x + z)^2 = 0$ comme équation cartésienne.

Définition (Point régulier) : Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $g(x, y, z) = 0$. Un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ est régulier si

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0).$$

Dans le cas contraire, on dit que le point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ est singulier.

Remarque 18 : On admet le théorème des fonctions implicites (hors-programme) : si $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ est un point régulier de la surface, alors $\mathscr{S}$ est le graphe d'une application au voisinage du point (x_0, y_0, z_0). Plus précisément, il existe trois intervalles ouverts I, J et K de $\mathbb{R}$ tels que $(x_0, y_0, z_0) \in I \times J \times K \subset U$ et

- soit il existe une application $\varphi_1 : J \times K \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in I \times J \times K, \quad \big(f(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \varphi_1(y, z) \big).$$

- soit il existe une application $\varphi_2 : I \times K \to J$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in I \times J \times K, \quad \big(f(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi_2(x, z) \big).$$

- soit il existe une application $\varphi_3 : I \times J \to K$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in I \times J \times K, \quad \big(f(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \varphi_3(x, y) \big).$$

On en déduit que la surface $\mathscr{S}$ admet un plan tangente au point (x_0, y_0, z_0).

Théorème (Plan tangent en un point régulier) : Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $g(x, y, z) = 0$.
Si $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ est un point régulier de la surface $\mathscr{S}$, alors la surface $\mathscr{S}$ admet un plan tangent en (x_0, y_0, z_0) dont un vecteur normal est $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$.

Remarque 19 : Si le point $M(x_0, y_0, z_0)$ est un point régulier de la surface d'équation $g(x, y, z) = 0$, on en déduit une équation cartésienne du plan tangent $\mathscr{P}$ en (x_0, y_0, z_0) avec les équivalences

$$A(x,y,z) \in \mathscr{P} \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{MA} \mid \nabla g(x_0,y_0,z_0) \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + (z-z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0.$$

Exemple 20 : On considère la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et on a

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z).$$

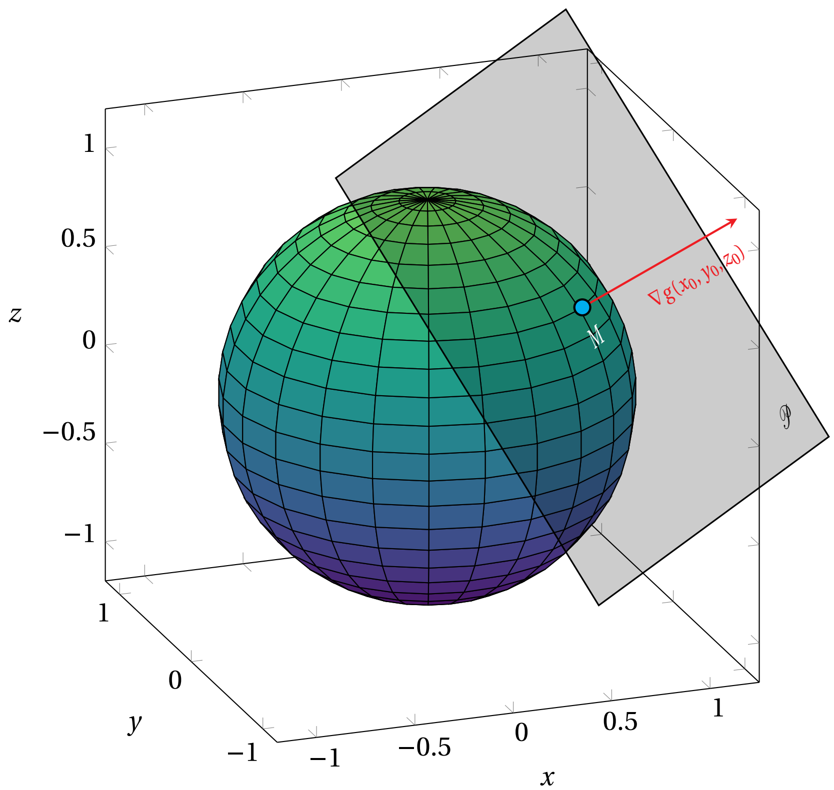
En particulier, on obtient que tous les points de la surface $\mathscr{S}$ d'équation $g(x, y, z) = 0$ sont réguliers. On en déduit que $\mathscr{S}$ admet un plan tangent $\mathscr{P}$ en tout point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ dont un vecteur normal $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$. Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est

$$\left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \middle| \nabla g(x_0,y_0,z_0) \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0x + y_0y + z_0z = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Comme $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$, on en déduit que $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$, donc l'équation précédente se simplifie en

$$x_0x + y_0y + z_0z = 1.$$

On peut représenter la surface et son plan tangent $\mathscr{P}$ au point $M(x_0, y_0, z_0)$ sur la figure ci-dessous.



Exercice 16 : Soit $\mathscr{S}$ la surface de l'espace d'équation

$$3x^2 + 4xy + 2yz + 4xz = 0.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Donner en ces points une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$.

Définition (Courbe tracée sur une surface) : Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $g(x, y, z) = 0$.
Une courbe tracée sur $\mathscr{S}$ est une application $\gamma = (x, y, z) : I \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall t \in I, \quad g\big(\gamma(t)\big) = g\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0.$$

Remarques 20 :

a) D'une point de vue géométrique, la courbe $\mathscr{C} = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in I\}$ est incluse dans la surface $\mathscr{S}$.

b) Si $\gamma'(t_0) \neq 0$ avec $t_0 \in I$, alors on peut vérifier que la droite passant par $\gamma(t_0)$ et dirigée par $\gamma'(t_0)$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$. Dans ce cas, on dit que $\gamma(t_0)$ est un point régulier de la courbe.

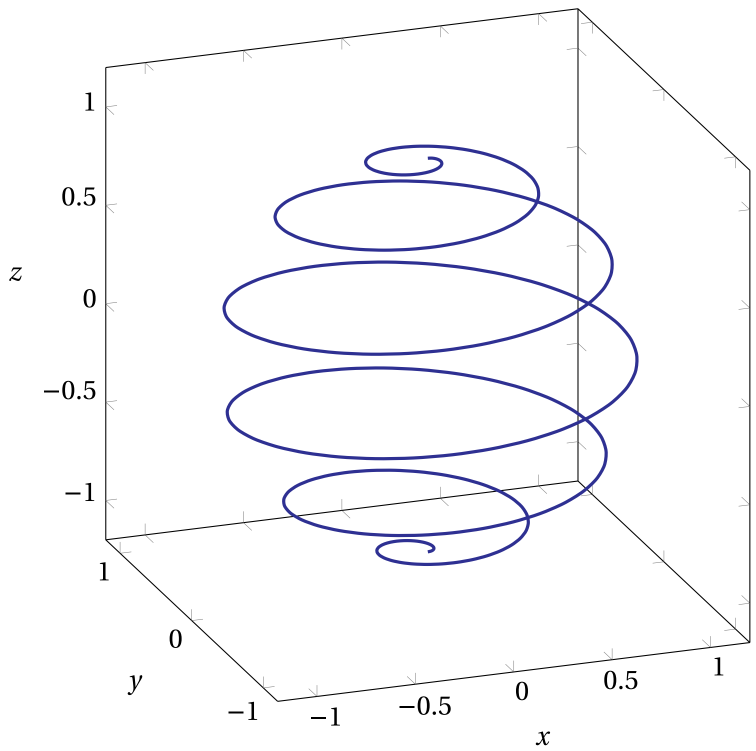
Exemple 21 : La fonction vectorielle $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma : t \mapsto \big(\cos(12t)\cos(t), \sin(12t)\cos(t), \sin(t)\big)$$

est une courbe tracée sur la la sphère $\mathscr{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, car on a

$$\big(\cos(12t)\cos(t)\big)^2 + \big(\sin(12t)\cos(t)\big)^2 + \big(\sin(t)\big)^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

On peut tracer la courbe définie par la fonction γ.



Proposition 4 : Si $\mathscr{C}$ est une courbe tracée sur une surface $\mathscr{S}$ et si M est un point régulier à la fois de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{C}$, alors la tangente en M à $\mathscr{C}$ est incluse dans le plan tangent en M à $\mathscr{S}$.