TD 4 Espaces vectoriels normés

Dans toute la feuille, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Normes sur un espace vectoriel

Exercice 1 : Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E.

1. Montrer que $N = \max(N_1, N_2)$ est une norme sur E.
2. Exprimer la boule unité de N avec les boules unités de N_1 et N_2.

Exercice 2 : Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad N(x_1, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n|.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $(a_1, \dots, a_n)$ pour que l'application N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Sous cette condition, étudier si les normes N et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes.

Exercice 3 : On considère l'ensemble

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 < +\infty \right\}.$$

1. Montrer que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'application $N : \ell^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad N(u) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \right)^{1/2}.$$

   est une norme sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

Exercice 4 : Pour tout $k \in [\![1,3]\!]$, on définit l'application $N_k : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par

$$(i)\ N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \qquad (ii)\ N_2(P) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2}, \qquad (iii)\ N_3(P) = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$$

pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que les applications N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que les normes N_1, N_2 et N_3 ne sont pas équivalentes deux à deux.

Exercice 5 : Soit E l'ensemble des suites réelles bornées u telles que $u_0 = 0$. On considère la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur E et l'application $N : E \to \mathbb{R}$ par

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \quad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et N sont des normes sur E.
2. Montrer que les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 6 : Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, on définit $N_a : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ avec $a \neq b$. Montrer que les normes N_a et N_b sont équivalentes si et seulement si $(a, b) \in [0, 1]^2$.

Exercice 7 : Soit $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel vectoriel normé E de dimension finie. On définit l'application $N : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{K}$ par

$$N : f \mapsto \sum_{k=1}^{p} \left\| f(e_k) \right\|.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la famille $\mathscr{F}$ pour que N soit une norme sur $\mathscr{L}(E)$.

Partie II Suites dans un espace vectoriel normé

Exercice 8 : On considère la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que $P = X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}$ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Étudier la convergence de la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9 : Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors M est la matrice nulle.

Exercice 10 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle, alors A est nilpotente.

Exercice 11 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad S_k = \sum_{i=0}^{k} A^i.$$

1. Montrer que si la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.
2. On suppose que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.
   (a) Montrer que la matrice $\mathrm{I}_n - A$ est inversible en étudiant son noyau.
   (b) Calculer $(A - \mathrm{I}_n)S_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et en déduire que la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\mathrm{I}_n - A)^{-1}$.
3. On considère une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant la propriété

$$\forall (M,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad \|MN\| \leqslant \|M\|\,\|N\|.$$

   Montrer que la boule $B(\mathrm{I}_n, 1)$ pour la norme $\|\cdot\|$ est incluse dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 12 : Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite des coefficients de $P \in \mathbb{R}[X]$, on note

$$N(P) = \max_{i\in\mathbb{N}} \left| \frac{a_i}{i+1} \right|.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que la suite (X^n) converge vers 0.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d > 0$.
   (a) Montrer que $(1, \ldots, X^{d-1}, P, X^{d+1} - P, \ldots)$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Construire une norme N sur $\mathbb{R}[X]$ telle que (X^n) converge vers P.

Partie III Espaces vectoriels normés de dimension finie

Exercice 13 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit une application $N : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ par

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad N(A) = n \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$ pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$.
3. Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors il existe $K \geqslant 0$ tel que

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad \|AB\| \leqslant K\|A\|\,\|B\|.$$

Exercice 14 :

1. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe un réel $\lambda_n > 0$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \lambda_n \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|.$$

2. Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.