



CHAPITRE 4

Espaces vectoriels normés

Plan du chapitre

I Normes sur un espace vectoriel	2
A - Normes et distances	2
B - Boules et sphères	4
C - Parties convexes	5
D - Parties bornées	6
II Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	7
III Équivalence des normes	10
A - Généralités	10
B - Espaces vectoriels normés de dimension finie	11

Introduction

Dans ce chapitre, on souhaite étendre différentes notions d'analyse portant sur les suites vues en première année au cadre plus général des espaces vectoriels.

Pour atteindre cet objectif, nous commencerons par introduire la notion de norme sur un espace vectoriel afin de généraliser la valeur absolue dans le cas réel ou le module dans le cas complexe. Dans un second temps, nous pourrons nous appuyer sur cette nouvelle notion pour étendre les définitions de l'analyse vues en première année sur les suites réelles ou complexes au cadre des suites de vecteurs.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Normes sur un espace vectoriel

I.A - Normes et distances

Dans cette sous-partie, on considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

Définition (Norme) : On appelle norme sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) Positivité : pour tout $x \in E$, on a $N(x) \geq 0$.
- (ii) Séparation : si $x \in E$ vérifie $N(x) = 0_{\mathbb{R}}$, alors $x = 0_E$.
- (iii) Homogénéité : pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $N(\lambda x) = |\lambda| \times N(x)$.
- (iv) Inégalité triangulaire : pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Remarque 1 : Intuitivement, la norme $N(x)$ d'un vecteur $x \in E$ représente sa longueur pour la norme N .

Exemple 1 : L'application $N : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N : x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{K}$. Il s'agit de la valeur absolue lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tandis qu'il s'agit du module lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition 1 : Si $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur E , alors elle vérifie les propriétés suivantes.

- (i) On a $N(0_E) = 0_{\mathbb{R}}$.
- (ii) Pour tout $x \in E$, on a $N(-x) = N(x)$.
- (iii) Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$.

Définition (Espace vectoriel normé) : Si N est une norme sur E , on dit que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

Notation : Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme utilisée, l'usage est de désigner la norme N par $\|\cdot\|$, le nombre réel $N(x)$ par $\|x\|$ et l'espace vectoriel normé (E, N) par E .

Remarques 2 :

- a) Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E , alors la restriction à F de la norme sur E est une norme sur F .
- b) Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}$, on considère toujours la norme $|\cdot|$.

Proposition 2 : Si $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E , alors l'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N : x \mapsto \sqrt{\varphi(x, x)}$ est une norme sur E .

Exemples 2 :

a) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^d |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|.$$

sont des normes sur $\mathbb{K}^d$.

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Rappelons qu'on note $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues du segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies par

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}), \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

sont des normes sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$.

c) Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et qu'on note $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors l'application $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\forall f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$$

est une norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

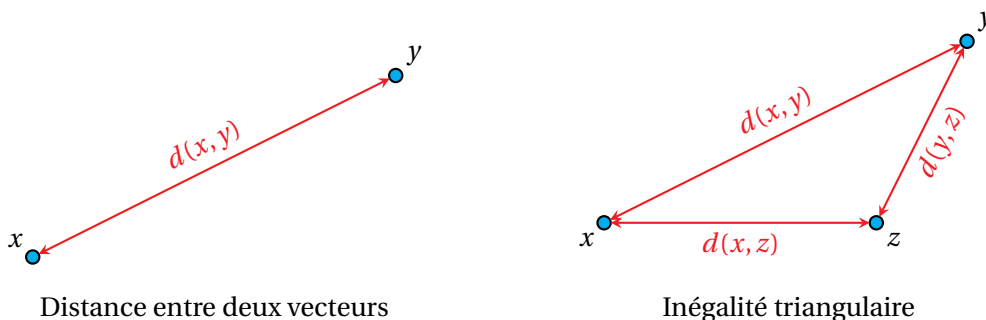
Définition (Distance associée à une norme) : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. La distance associée à la norme $\|\cdot\|$ est l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

Proposition 3 : La distance d associée à une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel E vérifie les propriétés suivantes.

- (i) Positivité : pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $d(x, y) \geq 0$.
- (ii) Symétrie : pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iii) Séparation : pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
- (iv) Inégalité triangulaire : pour tout $(x, y, z) \in E^3$, on a $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Illustration : Les figures suivantes utilisent la norme euclidienne usuelle dans le plan.



Exercice 1 : Soit d la distance associée à une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel E . Montrer que

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

I.B - Boules et sphères

Dans cette sous-partie, on considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ sur $\mathbb{K}$.

Définition (Boule ouverte / fermée) : Soient $a \in E$ et $r > 0$.

(i) La boule ouverte de centre a et de rayon r est

$$B(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\} = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}.$$

(ii) La boule fermée de centre a et de rayon r est

$$B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) \leq r\} = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}.$$

(iii) La sphère de centre a et de rayon r est

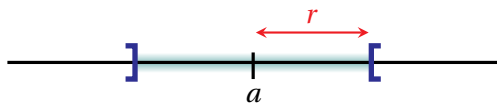
$$S(a, r) = B_f(a, r) \setminus B(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\} = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}.$$

Remarques 3 :

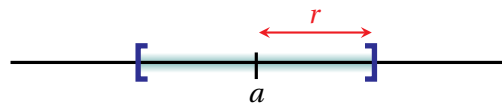
- a) L'ensemble $B(0_E, 1)$ est appelé la boule unité de $(E, \|\cdot\|)$.
- b) L'ensemble $B_f(0_E, 1)$ est appelé la boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|)$.
- c) L'ensemble $S(0_E, 1)$ est appelé la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$.
- d) Un vecteur de la sphère unité est dit unitaire.

Exemples 3 :

a) Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, on a $B(a, r) =]a - r, a + r[$ et $B_f(a, r) = [a - r, a + r]$.

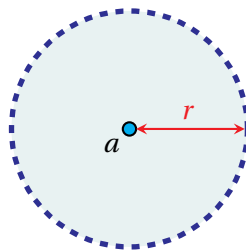


La boule $B(a, r)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

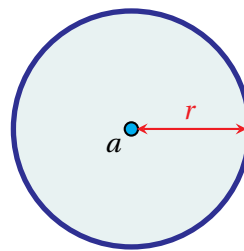


La boule $B_f(a, r)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

b) Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, on peut représenter les boules par les figures ci-dessous.



La boule $B(a, r)$ dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$



La boule $B_f(a, r)$ dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$

Exercice 2 : Représenter la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|\cdot\|_1$, la norme $\|\cdot\|_2$ et la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 3 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour tout éléments $(a_1, a_2) \in E^2$ et $(r_1, r_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, montrer que l'intersection $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2)$ est non vide si et seulement si $\|a_2 - a_1\| < r_1 + r_2$.

I.C - Parties convexes

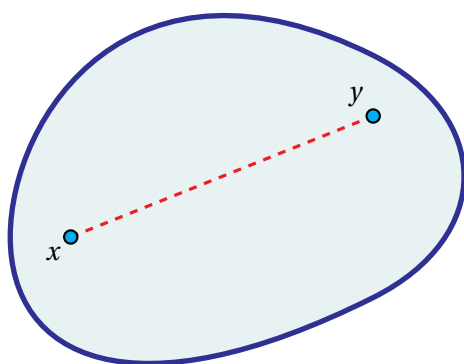
Dans cette sous-partie, on considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

Définition (Partie convexe) : On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel E est convexe si

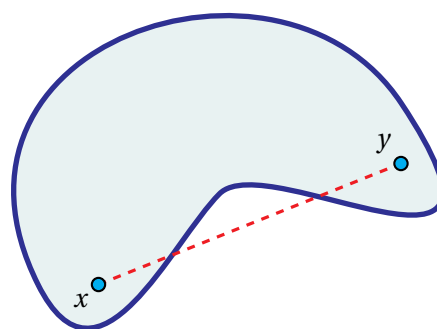
$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

Remarques 4 :

- Pour tout $(x, y) \in E^2$, l'ensemble $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \in E \mid \lambda \in [0, 1]\}$ est le segment reliant x à y .
- On en déduit qu'une partie A de E est convexe si et seulement si tout segment dont les extrémités sont des éléments de A est entièrement inclus dans A .



Une partie convexe



Une partie non convexe

Exemples 4 :

- Les ensembles $\emptyset$ et E sont des parties convexes de E .
- Les singletons $A = \{a\}$ avec $a \in E$ sont des parties convexes de E .
- Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des parties convexes de $\mathbb{R}$.
- Tout sous-espace vectoriel de E est convexe.

Proposition 4 : Les boules (ouvertes ou fermées) d'un espace vectoriel normé sont des parties convexes.

Exercice 4 : Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 : On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit une partie S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$S = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1 \right\}.$$

Montrer que S est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.D - Parties bornées

Dans cette sous-partie, on considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ sur $\mathbb{K}$.

Définition (Partie bornée) : On dit qu'une partie A de E est bornée s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M.$$

Exemples 5 :

- a) Les boules (ouvertes ou fermées) d'un espace vectoriel normé sont des parties bornées.
- b) Un sous-ensemble d'une partie bornée est encore une partie bornée.
- c) Un sous-espace vectoriel de E distinct de $\{0_E\}$ n'est pas borné.

Exemple 6 : On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et on définit la fonction $f_\alpha \in E$ par $f_\alpha : t \mapsto \alpha t^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

- a) La partie $A = \{f_\alpha \in E \mid \alpha \in \mathbb{R}_+\}$ est bornée dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_1)$ car

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad \|f_\alpha\|_1 = \int_0^1 |\alpha t^\alpha| dt = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \leq 1.$$

- b) La partie $A = \{f_\alpha \in E \mid \alpha \in \mathbb{R}_+\}$ n'est pas bornée dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$, car

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad \|f_\alpha\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f_\alpha(t)| = f_\alpha(1) = \alpha.$$

Remarque 5 : La notion de partie bornée dépend du choix de la norme sur l'espace vectoriel E .

Exercice 6 : Montrer qu'une partie A de E est bornée si et seulement si A est contenue dans une boule de E .

Exercice 7 : On considère deux parties non vides A et B de E . On définit la partie

$$A + B = \{x \in E \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a + b\}.$$

Montrer que A et B sont des parties bornées de E si et seulement si $A + B$ est une partie bornée de E .

Définition (Fonction bornée) : On dit qu'une fonction $f : X \rightarrow E$ d'un ensemble non vide X dans un espace vectoriel normé E est bornée sur X si l'ensemble de ses valeurs $f(X) = \{f(x) \in E \mid x \in X\}$ est une partie bornée de E , i.e.

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in X, \quad \|f(x)\| \leq M.$$

Exemple 7 : On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$. L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f : (x, y) \mapsto (\cos(x), \sin(y), \cos(x + y))$$

est bornée sur $\mathbb{R}^2$, car on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|f(x, y)\|_2 = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(y) + \cos^2(x + y)} \leq \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}.$$

Remarque 6 : La notion de fonction bornée dépend du choix de la norme sur l'espace vectoriel E .

Partie II Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ sur $\mathbb{K}$.

Définition (Suite d'éléments d'un ensemble) : Une suite d'éléments d'un ensemble X est une application de la forme $u : \llbracket n_0, +\infty \llbracket \rightarrow X$ où $n_0 \in \mathbb{N}$.

Notation : Si $u : \llbracket n_0, +\infty \llbracket \rightarrow X$ est une suite d'éléments d'un ensemble X , alors

- pour tout $n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$, l'élément $u(n)$ est noté u_n ;
- la suite u est notée $(u_n)_{n \geq n_0}$ ou $(u_n)_{n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket}$ ou (u_n) .

Exemples 8 :

a) Si on note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = \begin{pmatrix} e^{-1/n} & e^{-n} \\ e^{-n} & e^{-1/n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

alors $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Si on note $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}[X]$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on note $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n : t \mapsto t^n$, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Définition (Suite bornée) : On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de l'espace vectoriel normé E est bornée si l'ensemble de ses valeurs $\{u_n \in E \mid n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket\}$ est une partie bornée de E , i.e.

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket, \quad \|u_n\| \leq M.$$

Exemples 9 :

a) On considère l'espace vectoriel normé $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ où la norme $\|\cdot\|$ est définie par

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| = \max(|a|, |b|, |c|, |d|).$$

La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie dans l'exemple 8.a est bornée car on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\|A_n\| = \max(|e^{-1/n}|, |e^{-n}|, |e^{-n}|, |e^{-1/n}|) = e^{-1/n} \leq 1.$$

b) On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et on définit $f_n \in E$ par $f_n : t \mapsto nt^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_1)$, car

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{n}{n+1} \leq 1.$$

(ii) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$, car

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t)| = f_n(1) = n.$$

Remarque 7 : La notion de suite bornée dépend du choix de la norme sur l'espace vectoriel E .

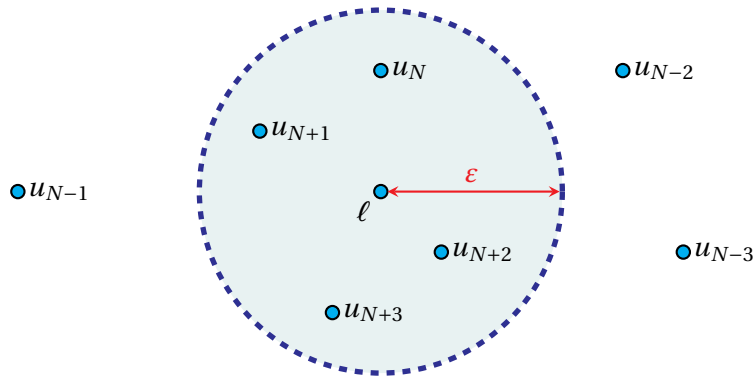
Définition (Suite convergente) : Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de l'espace vectoriel normé E est dite convergente s'il existe $\ell \in E$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket, \quad \forall n \in \llbracket N, +\infty \llbracket, \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers ℓ ou que ℓ est la limite de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$, ce que l'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Remarque 8 : Autrement dit, une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de l'espace vectoriel normé E converge vers $\ell \in E$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - \ell\| = 0$.

Illustration : D'un point de vue géométrique, la définition revient à dire que pour toute boule de centre $\ell \in E$ et de rayon $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$ à partir duquel tous les termes de la suite sont dans la boule de centre ℓ et de rayon $\varepsilon > 0$.



Définition (Suite divergente) : Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de l'espace vectoriel normé E est dite divergente si elle n'est pas convergente.

Exemples 10 :

a) On considère l'espace vectoriel normé $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ où la norme $\|\cdot\|$ est définie par

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| = \max(|a|, |b|, |c|, |d|).$$

La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie dans l'exemple 8.a converge vers la matrice I_2 , car on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\|A_n - I_2\| = \max(|e^{-1/n} - 1|, |e^{-n}|, |e^{-n}|, |e^{-1/n} - 1|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

b) On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et on définit $f_n \in E$ par $f_n : t \mapsto t^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_1)$, car

$$\|f_n - 0_E\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

(ii) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers la fonction nulle dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$, car

$$\|f_n - 0_E\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t)| = 1.$$

Plus généralement, on pourrait vérifier que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Remarque 9 : La notion de convergence d'une suite dépend du choix de la norme sur l'espace vectoriel E .

Proposition (Unicité de la limite d'une suite) : Si une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de l'espace vectoriel normé E converge vers $\ell_1 \in E$ et vers $\ell_2 \in E$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Remarque 10 : Cette propriété justifie à posteriori la terminologie « la limite » de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Proposition 5 : Toute suite convergente d'un espace vectoriel normé est bornée.

Exemple 11 : On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ où la norme $\|\cdot\|$ est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \left\| \sum_{k=0}^n a_k X^k \right\| = \sum_{k=0}^n |a_k|.$$

La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est divergente, car on a $\|P_n\| = n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc elle n'est pas bornée.

Exercice 8 : Pour chacune des normes de $\mathbb{R}[X]$ définies ci-dessous, étudier la convergence de la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$(i) N_1 : P \mapsto \int_0^1 |P(t)| dt, \quad (ii) N_2 : P \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|P^{(k)}(1)|}{k!}, \quad (iii) N_3 : P \mapsto |P(1)| + \int_0^1 |(1-t)P'(t)| dt.$$

Proposition (Opérations algébriques sur les limites de suites) : Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ des suites d'éléments d'un espace vectoriel normé E .

- (i) Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers $\ell \in E$, alors $(\|u_n\|)_{n \geq n_0}$ converge vers $\|\ell\|$.
- (ii) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers $\ell \in E$ et la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ converge vers $\ell' \in E$, alors la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n \geq n_0}$ converge vers $\lambda \ell + \mu \ell'$.
- (iii) Si $(\lambda_n)_{n \geq n_0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ convergeant vers $\lambda \in \mathbb{K}$ et si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers $\ell \in E$, alors la suite $(\lambda_n u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers $\lambda \ell$.

Exercice 9 : On considère la matrice

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- Montrer que $P(X) = X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{3}{8} \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de A .
- Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis étudier la convergence de la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition (Suite extraite) : On appelle suite extraite d'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments d'un ensemble X toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \geq k_0}$ où $\varphi : \llbracket k_0, +\infty \rrbracket \rightarrow \llbracket n_0, +\infty \rrbracket$ est une application strictement croissante.

Exemple 12 : Les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 6 : Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite d'éléments de l'espace vectoriel normé E convergeant vers $\ell \in E$, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers ℓ .

Exercice 10 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice de symétrie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, alors on a $A = I_n$.

Partie III Équivalence des normes

III.A - Généralités

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

Définition (Normes équivalentes) : Deux normes $N_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ sur E sont dites équivalentes s'il existe des réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Remarques 11 :

- Deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si et seulement si $\frac{N_1}{N_2}$ et $\frac{N_2}{N_1}$ sont majorées sur $E \setminus \{0_E\}$.
- La notion d'équivalence entre les normes sur E est une relation d'équivalence, i.e. elle vérifie les propriétés suivantes.
 - Réflexive : si N est une norme sur E , alors N est équivalente à N .
 - Symétrique : si N_1 est une norme sur E équivalente à une norme N_2 sur E , alors N_2 est équivalente à N_1 .
 - Transitive : si N_1 , N_2 et N_3 sont des normes sur E telles que N_1 et N_2 sont équivalentes et N_2 et N_3 sont équivalentes, alors N_1 et N_3 sont équivalentes.

Exemples 13 :

- Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{K}^d$ car pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d$, on a

$$\max_{1 \leq i \leq d} |x_i| \leq \sum_{k=1}^d |x_k| \leq \sum_{k=1}^d \max_{1 \leq i \leq d} |x_i| = d \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|,$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq d \|x\|_\infty.$$

- Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, car en considérant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction non nulle $f_n \in E$ définie par $f_n : t \mapsto t^n$, on a

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \frac{1}{(n+1)^{-1}} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

ce qui est incompatible avec l'existence du réel $\beta > 0$ dans la définition de normes équivalentes.

Exercice 11 : Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer pour tout $x \in \mathbb{K}^d$ que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{d} \|x\|_2 \leq d \|x\|_\infty.$$

Exercice 12 : Montrer que ces trois normes de $\mathbb{R}[X]$ définies ci-dessus ne sont pas équivalentes deux à deux.

$$(i) N_1 : P \mapsto \int_0^1 |P(t)| dt, \quad (ii) N_2 : P \mapsto \left(\int_0^1 |P(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad (iii) N_3 : P \mapsto |P(0)| + \int_0^1 |P'(t)| dt.$$

Proposition 7 : Les notions de partie bornée, de suite bornée et de suite convergente sont invariantes par passage à une norme équivalente.

Remarque 12 : Plus formellement, si $N_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux normes équivalentes sur E , alors on a les propriétés suivantes.

- (i) Une partie A de E est bornée dans (E, N_1) si et seulement si elle est bornée dans (E, N_2) .
- (ii) Pour toute suite (u_n) d'éléments de l'espace vectoriel E , la suite (u_n) est bornée dans (E, N_1) si et seulement si la suite (u_n) est bornée dans (E, N_2) .
- (iii) Pour toute suite (u_n) d'éléments de l'espace vectoriel E et tout élément $\ell \in E$, la suite (u_n) converge vers ℓ dans (E, N_1) si et seulement si la suite (u_n) converge vers ℓ dans (E, N_2) .

III.B - Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème d'équivalence des normes en dimension finie : Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

DÉMONSTRATION HORS PROGRAMME

Remarque 13 : Par conséquent, il n'est pas utile de préciser la norme pour travailler sur un espace vectoriel normé de dimension finie : les résultats seront les mêmes quelle que soit la norme utilisée.

On rappelle que si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$, on dit que l'élément $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d$ sont les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ si

$$x = \sum_{k=1}^d x_k e_k.$$

Corollaire 1 : Soient $\ell \in E$ un élément d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de E . Pour une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ de E , en notant $(\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{K}^d$ les coordonnées de ℓ dans la base $\mathcal{B}$ et $(u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(d)}) \in \mathbb{K}^d$ les coordonnées de u_n dans la base $\mathcal{B}$ pour tout $n \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket$, on a l'équivalence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{(k)} = \ell_k.$$

Remarques 14 :

- a) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Si $(u_n) = \left((u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(d)}) \right)$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}^d$ et si $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{K}^d$, alors on a l'équivalence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{(k)} = \ell_k.$$

- b) Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Si $(U_n) = \left((u_n^{(i,j)})_{i,j} \right)$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et si $L = (\ell_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors on a l'équivalence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{(i,j)} = \ell_{i,j}.$$

- c) Soit $d \in \mathbb{N}$. Si $(P_n) = \left(\sum_{k=0}^d a_n^{(k)} X^k \right)$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}_d[X]$ et si $L = \sum_{k=0}^d \ell_k X^k \in \mathbb{K}_d[X]$, alors on a l'équivalence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = L \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{(k)} = \ell_k.$$

Exemples 14 :

- a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^3$ définie par $u_n = (2\text{Arctan}(n), e^{-n}, 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers $(\pi, 0, 1)$.
- b) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \begin{pmatrix} 1 + e^{-n} & \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ \ln(n+1) - \ln(n) & n \sin(n^{-1}) \end{pmatrix}$$

converge vers la matrice I_2 .

- c) La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par $P_n = e^{-n} + X + \frac{1}{n+1}X^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers le polynôme X .