TD 8 Espaces probabilisés

Partie I Révisions - Dénombrement

Exercice 1 : Le code d'un cadenas est composé de quatre chiffres allant de 0 à 9.

1. Combien de codes différents sont possibles ?
2. Combien de codes sont composés de quatre chiffres distincts ?
3. Combien de codes sont composés d'au moins deux chiffres identiques ?
4. Combien de codes sont composés avec exactement trois chiffres distincts ?
5. Combien de codes sont composés avec exactement deux chiffres distincts ?

Exercice 2 : On étudie le nombre d'anagrammes d'un mot donné.

1. Dénombrer les anagrammes du mot « camion ».
2. Dénombrer les anagrammes du mot « classe ».
3. Dénombrer les anagrammes du mot « ananas ».
4. Combien d'anagrammes un mot admet-il en général ?

Exercice 3 - Nombres de Stirling : Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on note $S(n,k)$ le nombre de partitions en k parties de l'ensemble $[\![1,n]\!]$. Par convention, on pose $S(0,0)=1$.

1. Soit $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer les valeurs de
$$(i)\ \ S(n,0), \qquad (ii)\ \ S(n,1), \qquad (iii)\ \ S(n,n), \qquad (iv)\ \ S(0,k).$$
2. Montrer que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a la relation
$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k).$$
3. Démontrer que $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Partie II Révisions - Espaces probabilisés finis

Exercice 4 : Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire une à une et sans remise trois boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule noire ?
2. Sachant que l'on a tiré au moins une boule noire, quelle est la probabilité que la première boule soit noire ?

Exercice 5 : Combien de fois faut-il lancer un dé pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un « six » ?

Exercice 6 : Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un six une fois sur deux (les autres faces étant supposées équilibrées). On tire au hasard un dé de la pochette et on le lance.

1. On obtient un six. Calculer la probabilité que le dé tiré soit équilibré.
2. On a obtenu un cinq. Calculer la probabilité que le dé tiré soit équilibré.

Exercice 7 : Une urne A contient 6 boules blanches et 5 boules noires, tandis qu'une urne B contient 4 boules blanches et 8 boules noires. On transfère aléatoirement deux boules de l'urne B dans l'urne A, puis on tire une boule dans l'urne A.

1. Calculer la probabilité que l'on tire une boule blanche.
2. On a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'au moins une boule blanche ait été transférée de l'urne B à l'urne A.

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire les boules deux par deux et sans remise jusqu'à vider l'urne.

1. Calculer la probabilité p_n que l'on tire à chaque tirage une boule blanche et une boule rouge.
2. Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Interpréter le résultat.

Partie III Espaces probabilisés quelconques

Exercice 9 : On dispose de trois pièces de monnaie : la première donne pile avec la probabilité $p \in]0,1[$, la seconde donne toujours pile et la troisième est équilibrée. On prend une des trois pièces au hasard et on effectue une succession infinie de lancers indépendants avec cette même pièce.

1. Calculer la probabilité d'obtenir pile au premier lancer.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité p_n d'obtenir uniquement des piles au cours des n premiers lancers.
3. Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter le résultat.

Exercice 10 : On effectue une succession de lancers indépendants d'un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n l'évènement « le premier 6 apparait au n-ème lancer et tous les résultats obtenus sont distincts de 1 ».
   (a) Calculer la probabilité de A_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire la probabilité que tous les résultats soient distincts de 1 au cours de l'expérience.
2. Déterminer de manière analogue la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs.

Exercice 11 : Laure et Benjamin lancent à tour de rôle le même dé cubique parfait. Laure joue en premier. Le vainqueur du jeu est le premier qui obtient un 6.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité que Laure gagne avec son n-ième lancer de dé.
   (b) En déduire la probabilité que Laure gagne le jeu.
2. Calculer de manière analogue la probabilité que Benjamin gagne le jeu.
3. Montrer qu'il est presque sûr que le jeu se termine.

Exercice 12 : On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit au moins une fois face et au moins une fois pile. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on note p_n la probabilité que l'on ait effectué n lancers au total.

1. Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
2. Montrer qu'il est presque sûr de produire au moins un face et un pile.

Exercice 13 : On considère une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce qui a la probabilité $2/3$ de faire pile et $1/3$ de faire face. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant 2$, on désigne par A_n l'évènement « on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du n-ième lancer » et on note $p_n = P(A_n)$.

1. Déterminer p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer avec le système complet d'évènements $(F_1, P_1\cap F_2, P_1\cap P_2)$ que
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n.$$
3. En déduire une expression explicite de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
4. Montrer qu'il est presque sûr d'obtenir deux piles consécutifs.

Exercice 14 : On effectue une succession de tirages dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire en suivant le protocole suivant :

(i) si la boule tirée est blanche, on la replace dans l'urne et on double le nombre de boules blanches dans l'urne ;
(ii) si la boule tirée est noire, on arrête les tirages.

On note A l'évènement « les tirages ne s'arrêtent jamais » et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement « la n-ème boule tirée est blanche ».

1. Déterminer $P(B_1 \cap \cdots \cap B_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} \ln(1+2^{-k})$ est convergente.
3. Montrer que $P(A) > 0$.