



CHAPITRE 8

Espaces probabilisés

Plan du chapitre

I	Ensembles dénombrables	3
II	Espaces probabilisés	5
	A - Expérience aléatoire	5
	B - Tribu sur un ensemble	5
	C - Probabilité	7
III	Conditionnement et indépendance	10
	A - Conditionnement par un évènement	10
	B - Indépendance d'évènements	13

Introduction

La théorie des probabilités est une mathématisation de l'incertitude et du caractère imprévisible de certains phénomènes. Pendant l'antiquité, le hasard n'a pas été l'objet d'étude à proprement parler, mais il a été utilisé pour le divertissement dans les jeux de hasard comme les jeux de dés en terre cuite dont on trouve des traces trois millénaires avant notre ère en Égypte, en Mésopotamie et en Inde.

L'apparition de la notion de risque, préalable à l'étude des probabilités, n'est apparue qu'au XII^e siècle, pour l'évaluation de contrats commerciaux avec le *Traité des contrats* de Pierre de Jean Olivi, et elle s'est développée au XVI^e siècle, avec la généralisation des contrats d'assurance maritime.

Le célèbre problème des parties est à l'origine de la théorie des probabilités. Il avait pour objet de déterminer la proportion suivant laquelle l'enjeu doit être partagé entre les joueurs en fonction des points de chacun lorsqu'ils conviennent de ne point achever une partie. Il a été étudié par les mathématiciens italiens Luca Pacioli, Niccolo Fontana et Jérôme Cardan au XVI^e siècle, mais leurs réflexions manquaient de rigueur et demeuraient empiriques. Le problème fut entièrement résolu par Blaise Pascal et Pierre de Fermat dans une de leur correspondance en 1654 suite à une question posée par Antoine Gombaud (dit chevalier de Méré). À la suite d'un séjour à Paris en 1655, Christian Huygens prend connaissance de cette discussion à l'Académie Parisienne et publie en 1657 le premier traité sur la théorie probabiliste : *De ratiociniis in ludo aleae*. Cependant, Huygens attribue lui-même la paternité de la théorie des probabilités à Pascal et Fermat.

On trouve les premières traces d'une loi des grands nombres dans l'œuvre posthume *Ars Conjectandi* publiée en 1713 du mathématicien suisse Jacques Bernoulli. Abraham de Moivre publie en 1718 son traité *The Doctrine of Chances* contenant des problèmes combinatoires dont la formule de Stirling, des probabilités conditionnelles ainsi qu'une première version du théorème central limite. Aux alentours de 1770, Joseph-Louis Lagrange publie un mémoire étudiant des problèmes de durée d'un jeu de hasard, dans lequel il introduit pour la première fois des lois continues. Par la suite, il donne une première table de la loi normale dans son ouvrage publié en 1781. Ces évolutions permettent à Laplace d'énoncer une nouvelle version du théorème central limite en démontrant l'actuel théorème de Moivre-Laplace dans son traité *Théorie analytique des probabilités* publié 1812.

Finalement, la théorie moderne des probabilités est introduite par le mathématicien russe Kolmogorov au début du XX^e siècle. Son axiomatisation repose sur la théorie de la mesure développée par Henri Lebesgue dans sa dissertation *Intégrale, longueur, aire* publiée à l'université de Nancy en 1902.

Les probabilités jouent un rôle important en sciences. En physique, elles apparaissent par exemple dans la description du mouvement d'une particule immergée dans un fluide (mouvement brownien). Plus généralement, elles jouent un rôle central dans la branche de la physique qui étudie et décrit les phénomènes fondamentaux à l'échelle atomique et subatomique : la mécanique quantique. De plus, elles interviennent dans de nombreuses autres disciplines, notamment en biologie, en théorie des jeux ou en sciences humaines où les outils statistiques sont omniprésents.

Dans ce chapitre, nous commencerons par étudier succinctement la notion d'ensemble dénombrable. Dans un second temps, étendrons la définition d'espace probabilisé vue en première année ainsi que ses propriétés au cadre d'un univers infini.

Partie I Ensembles dénombrables

L'objectif de cette partie est d'introduire la notion d'ensemble dénombrable afin de l'utiliser strictement dans le contexte des probabilités. Cette notion ne sera l'objet d'aucune évaluation spécifique.

Rappelons qu'un ensemble Ω est en bijection avec un ensemble Ω' s'il existe une application bijective $f : \Omega \rightarrow \Omega'$.

Rappelons également qu'un ensemble Ω est de cardinal fini $n \in \mathbb{N}$ s'il est en bijection avec l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. Intuitivement, se donner une telle bijection revient à énumérer les éléments de Ω de 1 jusqu'à n .

Nous allons à présent nous intéresser au cas des ensembles infinis.

Définition (Ensemble dénombrable / au plus dénombrable) : Soit Ω un ensemble.

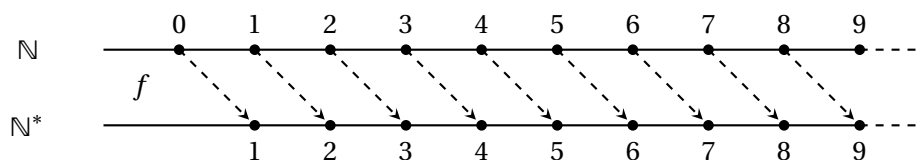
- (i) On dit que Ω est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
- (ii) On dit que Ω est au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Remarques 1 :

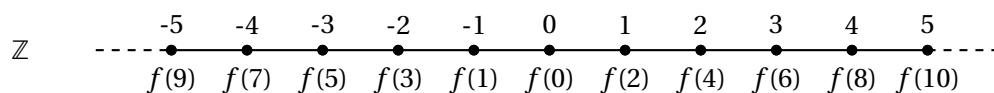
- a) Un ensemble dénombrable est nécessairement infini.
- b) Si un ensemble Ω est au plus dénombrable, on a deux possibilités.
 - Si Ω est fini, alors en notant $n = \text{Card}(\Omega)$, on peut écrire $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ où les éléments $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$ sont deux à deux distincts.
 - Si Ω est infini, alors il est dénombrable, donc on peut écrire $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ où $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite injective d'éléments de Ω .
- c) Intuitivement, un ensemble est au plus dénombrable si et seulement si on peut décrire un procédé d'énumération de ses éléments.

Exemples 1 :

- a) Un ensemble fini est au plus dénombrable.
- b) L'ensemble $\mathbb{N}$ est dénombrable : il suffit de considérer $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.
- c) L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est dénombrable : il suffit de considérer $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ définie par $f : n \mapsto n + 1$.



- d) L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable : il suffit de considérer $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f : n \mapsto (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.



Proposition 1 : Soit Ω un ensemble.

- (i) Si Ω est dénombrable, toute partie de Ω est au plus dénombrable.
- (ii) Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties dénombrables de Ω indexée par un ensemble I au plus dénombrable, alors la réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$ est dénombrable.

Exemple 2 : Comme on peut écrire $\mathbb{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} E_k$ où $E_k = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid (p, q) \in \llbracket -k, k \rrbracket \times \llbracket 1, k \rrbracket \right\}$ où l'ensemble E_k est fini pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Lemme 1 : L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

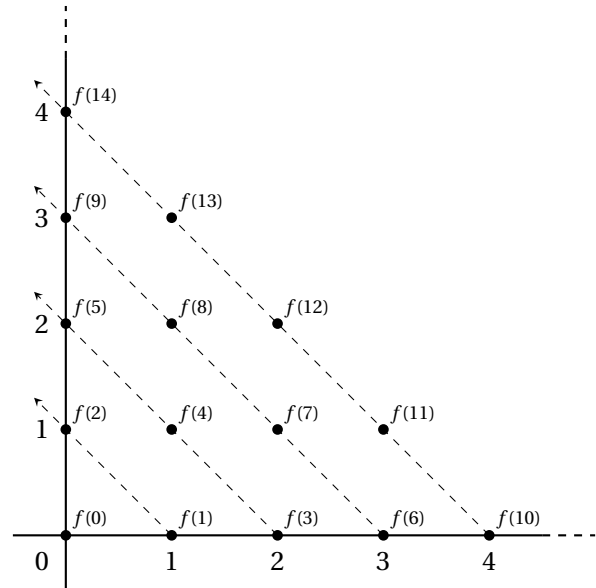
DÉMONSTRATION :

On énumère les éléments de $\mathbb{N}^2$ le long des diagonales (voir la figure ci-contre) : un élément $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ est caractérisé par l'indice de sa diagonale et sa position dans la diagonale, c'est-à-dire par le couple $(i + j, j)$.

Plus formellement, on considère $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout élément $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ par

$$g(i, j) = \left(\sum_{k=0}^{i+j-1} (k+1) \right) + j = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j.$$

On peut vérifier que g est bijective. L'application de la définition $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ est l'application réciproque de g .



Proposition 2 : Un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exemples 3 :

- a) L'ensemble $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable.
- b) Les ensembles $\mathbb{N}^k$, $\mathbb{Z}^k$ et $\mathbb{Q}^k$ sont dénombrables pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 3 (Hors programme) : L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

DÉMONSTRATION (HORS PROGRAMME) :

Il suffit de montrer que $]0, 1[$ n'est pas un ensemble dénombrable. On raisonne par l'absurde : on suppose que l'ensemble $]0, 1[$ est dénombrable, donc il existe une suite injective $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $]0, 1[= \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $(d_n^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite des décimales du nombre x_n , i.e. on a $d_n^{(k)} \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_n^{(k)}}{10^k}.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit $d_k \in \llbracket 0, 8 \rrbracket$ tel que $d_k \neq d_k^{(k)}$. Finalement, le nombre

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$$

est un élément de $]0, 1[$ distinct de x_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, car leur n -ième décimale est différente, d'où la contradiction.

Partie II Espaces probabilisés

II.A - Expérience aléatoire

Définition (Expérience aléatoire) : Une expérience aléatoire est une expérience qui ne donne pas nécessairement le même résultat quand on la renouvelle dans des conditions identiques.

Exemples 4 :

- a) Un lancer d'une pièce.
- b) Un lancer de trois dés discernables.
- c) La durée de vie en année d'un composant électronique.
- d) La durée de désintégration d'un isotope radioactif.

Définition (Univers) : L'univers est l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.

Exemples 5 : On reprend les expériences aléatoires de l'exemple 4.

- a) $\Omega = \{\text{Pile, Face}\}$ qui est fini.
- b) $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^3$ qui est fini.
- c) $\Omega = \mathbb{N}$ qui est dénombrable.
- d) $\Omega = \mathbb{R}_+$ qui n'est pas dénombrable.

Remarque 2 : En général, l'univers associé à une expérience aléatoire n'est pas explicite.

II.B - Tribu sur un ensemble

Le programme de première année se limitait à l'étude des expériences aléatoires dont l'univers Ω était un ensemble fini. Dans ce cas, un évènement A était simplement une partie de Ω .

Nous allons à présent étudier des expériences aléatoires dont l'univers peut être infini. Dans ce nouveau cadre, si on continue à considérer toute partie de Ω comme un évènement, alors il est possible de construire des expériences aléatoires où il n'existe pas de manière satisfaisante d'associer à chaque évènement une probabilité. Ce constat nous amène à introduire la notion de tribu sur un ensemble Ω .

On rappelle que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties d'un ensemble Ω , la réunion et l'intersection de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement les parties de Ω définies par

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\}.$$

On rappelle également que le complémentaire d'une partie A d'un ensemble Ω est

$$\overline{A} = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}.$$

Proposition (Loi de De Morgan) : Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties d'un ensemble Ω , on a

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}.$$

Définition (Tribu) : Une tribu sur un ensemble Ω est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- (ii) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $\overline{A} \in \mathcal{A}$.
- (iii) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Exemple 6 : Les ensembles $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ sont des tribus sur Ω .

Définition (Espace probabilisable) : Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω .

Remarque 3 : En pratique, on peut vérifier que si Ω est au plus dénombrable, on peut choisir $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ pour étudier une expérience aléatoire. Dans le cas contraire, on admettra l'existence d'un espace probabilisable adapté à l'expérience étudiée.

Proposition 4 : Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

- (i) On a $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- (ii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors on a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
- (iii) Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$.
- (iv) Pour tout $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, on a $B \setminus A \in \mathcal{A}$.

Définition (Évènements) : Les éléments d'une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω sont appelés les évènements.

Exemples 7 : On reprend les expériences aléatoires de l'exemple 4.

- a) On munit Ω de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. L'évènement « faire pile » est $E = \{\text{Pile}\}$.
- b) On munit Ω de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. L'évènement « la somme des dés est 4 » est $E = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$.
- c) On munit Ω de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. L'évènement « le composant électronique vie au plus 5 ans » est $E =]0, 5]$.
- d) Nous admettons qu'il existe une tribu adéquate pour étudier cette expérience aléatoire. L'évènement « l'isotope ne s'est pas désintégré au bout de 10 ans » est $E =]10, +\infty[$.

Vocabulaires : La théorie moderne des probabilités utilisent le langage des ensembles pour modéliser une expérience aléatoire. Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable, le tableau ci-dessous établit la correspondance entre le langage ensembliste et le langage probabiliste.

Notation	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
Ω	ensemble plein	évènement certain
$\emptyset$	ensemble vide	évènement impossible
ω	élément de Ω	évènement élémentaire
$A, B \in \mathcal{A}$	éléments de $\mathcal{A}$	évènements
$\overline{A}$	complémentaire de A dans Ω	évènement contraire de A
$A \cup B$	réunion de A et B	évènement A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	évènement A et B
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles

II.C - Probabilité

Maintenant que nous avons formalisé la notion d'évènement dans le cadre d'un univers infini, nous pouvons étendre la notion de probabilité vue en première année.

Définition (Probabilité) : Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) On a $P(\Omega) = 1$.
- (ii) L'application P est σ -additive : pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements deux à deux incompatibles, on a

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Remarques 4 :

- a) La condition (ii) de la définition ci-dessus sous-entend que la série $\sum P(A_n)$ est convergente.
- b) Si $A_1, \dots, A_n$ sont des évènements deux à deux incompatibles, la condition (ii) implique également que

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

En particulier, la définition ci-dessus est plus générale que celle vue en première année.

Définition (Espace probabilisé) : Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où Ω est un ensemble, $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Remarque 5 : Imaginons que l'on souhaite étudier l'expérience aléatoire consistant à choisir un nombre réel aléatoirement et uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$. Intuitivement, pour modéliser cette expérience, nous pouvons considérer comme univers $\Omega = [0, 1]$ et nous cherchons une tribu $\mathcal{A}$ contenant tous les intervalles $[a, b] \subset [0, 1]$ et une probabilité $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ telle que

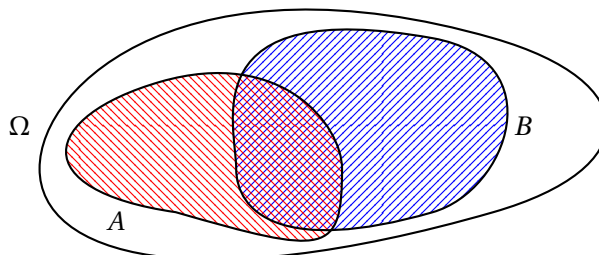
$$\forall [a, b] \subset [0, 1], \quad P([a, b]) = b - a.$$

Si on choisit la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, on peut démontrer sous certaines conditions qu'il n'existe pas de probabilité vérifiant la relation ci-dessus. C'est une des raisons qui motive l'introduction de la notion de tribu.

Proposition 5 : Soient A et B deux évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- (i) $P(\emptyset) = 0$.
- (ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- (iii) Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
- (iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Illustration : La figure ci-dessous permet de comprendre l'origine de la formule (iv) de la proposition.



Exercice 1 : Un ordinateur génère aléatoirement un nombre entier strictement positif. On suppose qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de générer l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est $C \times 2^{-n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par G_n l'évènement « le nombre généré est n » et par A_n l'évènement « le nombre généré est un multiple de n ».

- 1) Déterminer la valeur de la constante C .
- 2) Calculer la probabilité de l'évènement A_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Théorème (Continuité monotone) : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- (i) Si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (i.e. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), alors on a

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

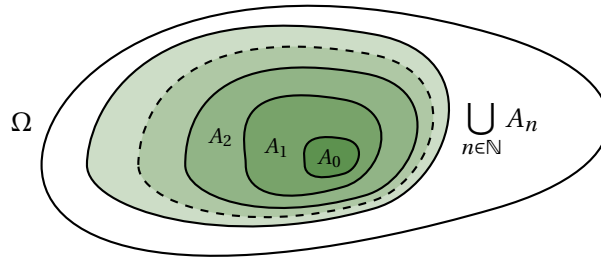
- (ii) Si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (i.e. $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), alors on a

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

- (iii) Dans le cas général, on a les égalités

$$P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right).$$

Illustration : La figure ci-dessous représente la situation du (i) de la proposition.



Comme on a les inclusions $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, les évènements de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas deux à deux incompatibles en général, mais on peut écrire

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 \cup \underbrace{\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{n+1} \setminus A_n)\right)}_{\text{réunion d'évènements deux à deux incompatibles}}.$$

Exemple 8 : On procède à une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par F_k l'évènement « faire face au k -ième lancer » et par F l'évènement « ne faire que des faces au cours de l'expérience ». D'après la propriété (iii) de la proposition précédente, on a

$$P(F) = P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} F_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n F_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Définition (Évènement presque sûr / négligeable) : Soit A un évènement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- (i) L'évènement A est dit presque sûr si $P(A) = 1$.
- (ii) L'évènement A est dit négligeable si $P(A) = 0$.

Remarque 6 : Un évènement A est négligeable si et seulement si $\bar{A}$ est presque sûr.

Exemple 9 : L'évènement A de l'exemple précédent est négligeable, mais il n'est pas impossible.

Proposition (Sous-additivité) : Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alors

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Remarques 7 :

- a) On rappelle que si la série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ est divergente, alors on note $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$.
- b) La proposition précédente reste valable pour un nombre fini d'évènements : si $A_1, \dots, A_n$ sont des évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alors on a

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

- c) On déduit de la proposition ci-dessus qu'une réunion dénombrable d'évènements négligeables est encore un évènement négligeable. En effet, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements négligeables, alors on a

$$0 \leq P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0.$$

- d) En passant à l'évènement contraire, on en déduit qu'une intersection dénombrable d'évènements presque sûr est encore un évènement presque sûr.

Exercice 2 : On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'un dé équilibré. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par S_k l'évènement « le résultat du k -ième lancer est 6 ».

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un 6 au cours des n premiers lancers.
- 2) Montrer qu'il est presque sûr d'obtenir un 6.
- 3) Montrer qu'il est presque sûr d'obtenir une infinité de 6.

Partie III Conditionnement et indépendance

Dans toute cette partie, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dans cette partie, on étend les principales notions vues en première année dans le cadre d'un univers fini.

III.A - Conditionnement par un évènement

Définition (Probabilité conditionnelle) : Soient A et B deux évènements tels que $P(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le nombre

$$P(A | B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemple 10 : On lance un dé équilibré classique. On désigne par A l'évènement « le résultat du dé est 6 » et par B l'évènement « le résultat du dé est pair ». On a

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Proposition 6 : Si B est un évènement tel que $P(B) > 0$, alors l'application $P_B : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ définie par $A \mapsto P_B(A)$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Remarque 8 : On déduit de la proposition précédente que toutes les propriétés de la proposition 5 sont valables avec la probabilité P_B .

Formule des probabilités composées : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A_1, \dots, A_n$ sont des évènements dont l'intersection est de probabilité non nulle, alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Exemple 11 : Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise trois boules de cette urne. On souhaite déterminer la probabilité que la première boule tirée soit blanche, la seconde noire et la troisième blanche.

Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on note B_i l'évènement « la i -ème boule tirée est blanche » et N_i l'évènement « la i -ème boule tirée est noire ». Par la formule des probabilités composées, on a

$$P(B_1 \cap N_2 \cap B_3) = P(B_1)P(N_2 | B_1)P(B_3 | B_1 \cap N_2) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{42}.$$

Exercice 3 : Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avec deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

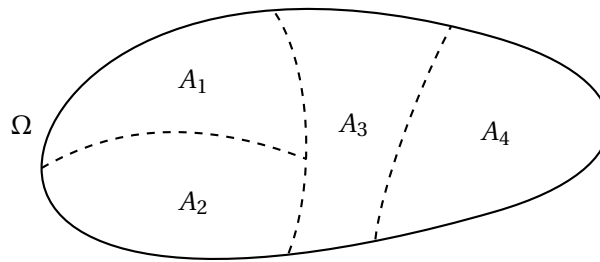
- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges?
- 2) Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges?

Définition (Système complet d'événements) : On appelle système complet d'événements toute famille au plus dénombrable d'événements $(A_i)_{i \in I}$ telle que

- (i) les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux incompatibles,
- (ii) les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ recouvrent Ω , i.e. $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Remarque 9 : En pratique, on a $I = \mathbb{N}$ ou $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Illustration : On peut représenter la notion de système complet d'événement par la figure ci-dessous.



Formule des probabilités totales : Soit B un événement. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B | A_n) P(A_n).$$

Remarques 10 :

- a) Pour que la formule précédente est toujours un sens, on convient que $P(B | A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.
- b) Le résultat ci-dessus sous-entend que la série $\sum P(B \cap A_n)$ est convergente.
- c) En particulier, si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements, alors on a

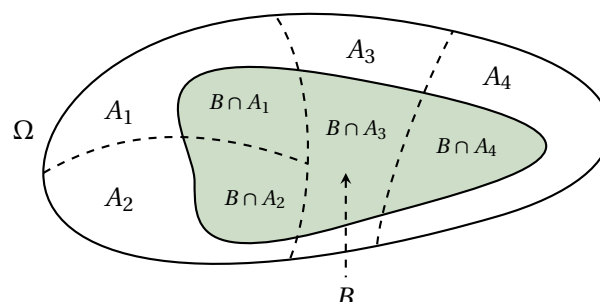
$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n P(B | A_k) P(A_k).$$

- d) La formule des probabilités totales reste valable lorsque $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas un système complet d'événements mais s'ils sont deux à deux incompatibles et vérifient

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1.$$

Dans ce cas, on dit que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'événements.

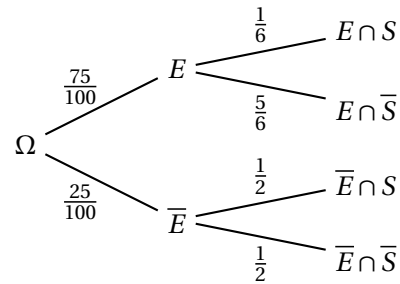
Illustration : En reprenant la figure précédente, nous pouvons représenter la formule des probabilités totales.



Exemple 12 : Un sac contient un lot de 100 dés composé de 75 dés équilibrés et de 25 dés pipés donnant 6 avec la probabilité $1/2$. On souhaite déterminer la probabilité de faire un six en prenant un dé au hasard dans ce sac.

On note E l'évènement « le dé choisi est équilibré » et S l'évènement « le résultat du dé lancé est 6 ». Comme $(E, \bar{E})$ est un système complet d'évènements, on a par la formule des probabilités totales que

$$P(S) = P(S | E)P(E) + P(S | \bar{E})P(\bar{E}) = \frac{1}{6} \times \frac{75}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$



Exercice 4 : Une urne contient une boule blanche. On joue indéfiniment à pile ou face avec une pièce qui a la probabilité $1/3$ de donner pile. Chaque fois que l'on obtient face, on ajoute une boule noire dans l'urne et la première fois que l'on fait pile, on tire au hasard une boule dans l'urne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement « on obtient pile pour la première fois lors du n -ième lancer ».

- 1) Calculer $P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2) Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

Formule de Bayes : Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}.$$

Exemple 13 : On reprend l'exemple précédent. On suppose que le résultat du dé lancé est 6 et on souhaite déterminer la probabilité que le dé choisi soit équilibré.

Par la formule de Bayes, on a

$$P(E | S) = \frac{P(S | E)P(E)}{P(S)} = \frac{1}{6} \times \frac{75}{100} \times \frac{4}{1} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 5 : On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ urnes contenant chacune n boules. On suppose que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la k -ième urne contient k boules blanches. On prend une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

- 1) Quelle est la probabilité que cette boule soit blanche?
- 2) On a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré la boule dans l'urne $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$?

III.B - Indépendance d'évènements

Définition (Indépendance de deux évènements) : Deux évènements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarque 11 : Si B est de probabilité non nulle, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A | B) = P(A)$. Autrement dit, avoir des informations sur la réalisation de B n'influence pas la réalisation de A .

Exemple 14 : On lance un dé équilibré. On désigne par A l'évènement « le résultat du dé est pair » et par B l'évènement « le résultat du dé est un multiple de 3 ». Comme $A \cap B$ est l'évènement « le résultat du dé est 6 », on a

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = P(A)P(B),$$

donc les évènements A et B sont indépendants.

Proposition 7 : Si A et B sont deux évènements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alors les évènements A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Remarque 12 : Sous les mêmes hypothèses, on en déduit également que $\bar{A}$ et B sont des évènements indépendants et que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont des évènements indépendants.

Définition (Indépendance d'une famille finie d'évènements) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Des évènements $A_1, \dots, A_n$ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont dits indépendants si

$$\forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Remarques 13 :

a) Par définition, trois évènements A, B, C de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(B \cap C) = P(B)P(C), \quad P(A \cap C) = P(A)P(C), \quad P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

b) Si les évènements $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux, i.e.

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \text{ avec } i \neq j, \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

La réciproque est fautive comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 15 : On lance un dé tétraédrique équilibré. On désigne par A l'évènement « le résultat du dé est 1 ou 2 », par B l'évènement « le résultat du dé est 1 ou 3 » et par C l'évènement « le résultat du dé est 1 ou 4 ».

Les évènements A, B et C sont deux à deux indépendants car

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B), \quad P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C), \quad P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C),$$

mais ils ne sont pas indépendants car

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C).$$

Proposition 8 : Si $A_1, \dots, A_n$ sont des évènements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alors les évènements $C_1, \dots, C_n$ où $C_i \in \{A_i, \bar{A}_i\}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont indépendants.

Exercice 6 : Les évènements A_2 et A_3 de l'exercice 1 sont-ils indépendants?