TD 10 Espaces préhilbertiens réels

Partie I Produit scalaire et norme

Exercice 1 : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leqslant 1$.

1. Montrer que $(x + y + z)^2 \leqslant 17/10$.
2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 2 : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$
2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 3 : Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ que $I_{m+n}^2 \leqslant I_{2m} I_{2n}$.

Exercice 4 : Soient E un espace préhilbertien réel, $a \in E$ un vecteur unitaire et un scalaire $k \in \mathbb{R}$. On définit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ par
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = (x \mid y) + k(x \mid a)(y \mid a).$$
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que φ soit un produit scalaire sur E.

Partie II Orthogonalité

Exercice 5 : On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}\left(A^\top B\right)$.

1. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}(A)^2 \leqslant n\mathrm{tr}(A^\top A)$. Préciser les cas d'égalité.
3. Montrer que $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser sa dimension.
4. Déterminer $F^\perp$.

Exercice 6 - Polynômes de Laguerre : On définit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par
$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $\varphi(X^m, X^n)$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.
3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 7 - Polynômes de Legendre : On définit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par
$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-ième polynôme de Legendre par
$$P_n(X) = \left[(X^2 - 1)^n\right]^{(n)}.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que
$$\|P_n\| = 2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Exercice 8 : Soit E un espace préhilbertien réel. On considère deux sous-espaces vectoriels F et G de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
2. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$ avec égalité si E est euclidien.
3. Montrer que $F \subset (F^\perp)^\perp$ avec égalité si E est euclidien.

Exercice 9 : Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de $n\in\mathbb{N}^*$ vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien E telle que

$$\forall x\in E \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k)^2.$$

Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de E.

Partie III Projection orthogonale

Exercice 10 : On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire euclidien canonique.

1. Déterminer la projection orthogonale sur H d'équation $x-2y+z=0$.
2. Calculer la distance de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ au plan H.

Exercice 11 : On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire euclidien canonique.

1. Déterminer la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F d'équations
$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0\\ x-y+z-t &= 0.\end{cases}$$
2. Calculer la distance de $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ au sous-espace vectoriel F.

Exercice 12 : Déterminer le nombre $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2-at-b)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13 : Soient $n\in\mathbb{N}$ et $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ des nombres deux à deux distincts. On définit une application $\varphi : \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}$ par

$$\forall (P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2,\quad \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer la distance d'un polynôme $Q\in\mathbb{R}_n[X]$ au sous-espace vectoriel
$$H = \left\{ P\in\mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}.$$
3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 14 : Soient E un espace euclidien et $p\in\mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) L'endomorphisme p est un projecteur orthogonal.
(ii) Pour tout $x\in E$, on a $(p(x)\mid x)\geqslant 0$.
(iii) Pour tout $x\in E$, on a $\|p(x)\|\leqslant \|x\|$.
(iv) Pour tout $(x,y)\in E^2$, on a $(p(x)\mid y) = (x\mid p(y))$.

Exercice 15 - Déterminant de Gram : Soit E un espace préhilbertien réel. Pour toute famille $(u_1,\dots,u_p)$ de vecteurs de E, on note $G(u_1,\dots,u_p)$ le déterminant de la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice (i,j) est $(u_i\mid u_j)$.

1. Montrer que la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est liée si et seulement si $G(u_1,\dots,u_p)=0$.
2. Montrer que si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E alors pour tout $x\in E$,
$$G(e_1,\dots,e_p)\times d(x,F)^2 = G(e_1,\dots,e_p,x).$$
3. Montrer que
$$G(e_1,\dots,e_p)\leqslant \|e_1\|^2\dots\|e_p\|^2.$$