Mathématiques

PSI

Lycée Couffignal

CHAPITRE 10

Espaces préhilbertiens réels

Plan du chapitre

Introduction

Un espace préhilbertien réel est un espace vectoriel réel dans lequel on dispose d'une opération algébrique supplémentaire permettant d'associer un nombre réel à chaque couple de vecteurs : un produit scalaire. Cette nouvelle application permet d'étendre les notions traditionnelles de géométrie euclidienne du plan et de l'espace à un espace vectoriel réel quelconque : les longueurs, les angles, l'orthogonalité et la projection orthogonale. Le préfixe « pré » dans le mot « préhilbertien » fait référence à l'absence d'une hypothèse particulière : la complétude. Lorsque cette hypothèse supplémentaire est vérifiée, l'espace porte le nom d'espace hilbertien ou d'espace de Hilbert en référence au mathématicien allemand David Hilbert.

Bien que la géométrie euclidienne remonte à l'antiquité, les produits scalaires n'apparaissent qu'au XIXe siècle au fur et à mesure qu'émerge et se formalise la notion générale d'espace vectoriel. L'attribution de sa paternité n'est pas évidente, mais on peut citer les mathématiciens Grassmann, Peano et Clifford.

Au début du XXe siècle, les mathématiciens Hilbert, Schmidt, Riesz et Fréchet commencent à s'intéresser à certains espaces préhilbertiens de dimension infinie dont les éléments sont des fonctions afin d'étudier des équations intégrales : c'est la naissance de l'analyse fonctionnelle. Cette dernière est omniprésente de nos jours dans de nombreux problèmes issus de la physique.

Les espaces préhilbertiens interviennent dans de nombreux domaines de la physique. Ils sont par exemple au cœur de la théorie de la mécanique quantique. D'autre part, ils permettent d'introduire de nombreux outils pour étudier les équations aux dérivées partielles qui sont omniprésentes dans les problèmes de la physique. En mathématiques, la généralisation des notions de produit scalaire et de projection orthogonale nous permettra de construire la théorie des séries de Fourier dans un futur chapitre.

Dans ce chapitre, nous commencerons par définir la notion générale de produit scalaire sur un espace vectoriel réel. Dans un second temps, nous étudierons l'orthogonalité dans ce nouveau cadre, puis finalement nous généraliserons la notion de projection orthogonale avec ses propriétés classiques.

Dans tout le chapitre, on considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$.

Partie I Généralités

I.A - Produit scalaire

Définition (Produit scalaire) : Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire si elle vérifie les conditions suivantes.

(i) Linéaire à gauche : pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

(ii) Linéaire à droite : pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

(iii) Symétrique : pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

(iv) Positive : pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \geqslant 0$.

(v) Définie : si $x \in E$ vérifie $\varphi(x, x) = 0$, alors $x = 0_E$.

Remarques 1 :

a) Les points (i) et (ii) signifient qu'un produit scalaire est une application bilinéaire sur E.

b) Si la condition (iii) est vérifiée, alors les conditions (i) et (ii) sont équivalentes.

c) Sur un même espace vectoriel réel, il existe en général plusieurs produits scalaires. Les notions que nous allons voir dans la suite de ce chapitre dépendent entièrement du produit scalaire choisi.

Exemples 1 :

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le produit scalaire euclidien canonique sur $E = \mathbb{R}^n$ est défini par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le produit scalaire canonique sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est défini par

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A, B) = \operatorname{tr}\left(A^\top B\right).$$

c) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Si $E = \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (f, g) \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})^2, \quad \varphi(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

d) Si $E = \mathbb{R}[X]$, l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Remarque 2 : Si on identifie les éléments de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \varphi(X, Y) = X^\top Y.$$

Définition (Espace préhilbertien réel) : Si φ est un produit scalaire sur E , on dit que le couple (E, φ) est un espace préhilbertien réel.

Définition (Espace euclidien) : On dit qu'un espace préhilbertien réel (E, φ) est un espace euclidien si E est de dimension finie.

Notation : Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le produit scalaire utilisé, l'usage est de désigner le produit scalaire de deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ par $(x \mid y)$, $\langle x \mid y \rangle$ ou $x \cdot y$ et l'espace préhilbertien réel (E, φ) par E.

Remarque 3 : Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel préhilbertien réel E, alors la restriction à F^2 du produit scalaire sur E est un produit scalaire sur F.

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k) Q(k).$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

I.B - Norme associée à un produit scalaire

Dans cette sous-partie, on considère un espace préhilbertien E.

Définition (Norme associée à un produit scalaire) : La norme associée au produit scalaire de l'espace préhilbertien E est l'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}.$$

Exemple 2 : La norme associée au produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$ est

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Proposition 1 : La norme $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes.

(i) Positivité : pour tout $x \in E$, on a $\|x\| \geqslant 0$.

(ii) Séparation : si $x \in E$ vérifie $\|x\| = 0$, alors $x = 0_E$.

(iii) Homogénéité : pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$.

Proposition (Identités remarquables) : Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a les relations

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2 \qquad \text{et} \qquad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2.$$

Remarque 4 : On en déduit l'identité de polarisation :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Exercice 2 : Soit E un espace préhilbertien réel. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad 2 + \|x+y\|^2 \leqslant 2\left(1 + \|x\|^2\right)\left(1 + \|y\|^2\right).$$

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz) : Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a l'inégalité

$$|(x \mid y)| \leqslant \|x\| \|y\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

Exercice 3 : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

1. Montrer que $(x + 2y + 3z)^2 \leqslant 14$.
2. Étudier le cas d'égalité.

Proposition (Inégalité triangulaire) : Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a l'inégalité

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si $x = 0$ ou s'il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y = \lambda x$.

Remarque 5 : On en déduit que $\|\cdot\| : x \mapsto \sqrt{(x \mid x)}$ est une norme sur E. En particulier, toutes les notions introduites dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés sont valables dans le cadre des espaces préhilbertiens réels.

Partie II Orthogonalité

Dans cette partie, on considère un espace préhilbertien E.

II.A - Vecteurs orthogonaux

Définition (Vecteurs orthogonaux) : Deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ sont dits orthogonaux si $(x \mid y) = 0$.

Exemples 3 : On reprend les espaces préhilbertiens réels de l'exemple 1.

a) Les vecteurs $(1, -1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ et $(1, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux.

b) La matrice I_n est orthogonal à toute matrice nilpotente.

c) Les fonctions $t \mapsto 1$ et $t \mapsto t - \dfrac{a+b}{2}$ sont orthogonales.

d) Les polynômes X et $X - 2$ sont orthogonaux.

Théorème de Pythagore : Deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Exercice 4 : Soit $(u, v) \in E^2$ où E est un espace préhilbertien réel. Montrer que les vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u + tv\| \geqslant \|u\|.$$

II.B - Sous-espaces orthogonaux

Définition (Sous-espaces orthogonaux) : Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits orthogonaux si tous les vecteurs de F sont orthogonaux à tous les vecteurs de G, i.e.

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad (x \mid y) = 0.$$

Exemple 4 : Si on munit l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$, alors les sous-espaces vectoriels $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

Définition (Orthogonal d'une partie d'un espace préhilbertien) : Soit A une partie de E. L'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A, i.e.

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A,\ (x \mid a) = 0\}.$$

Proposition 2 : Soit A une partie de l'espace vectoriel E.

(i) L'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) Si A est un sous-espace vectoriel de E engendré par une famille $(v_1, \dots, v_p)$ de E, alors

$$A^\perp = \left\{x \in E \mid \forall k \in [\![1, p]\!],\ (x \mid v_k) = 0\right\} = \{v_1, \dots, v_p\}^\perp.$$

Exemple 5 : Dans $E=\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien canonique, l'orthogonal de

$$H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$$

est la droite $H^\perp=\mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$.

Exercice 5 : On considère le produit scalaire $\varphi:(P,Q)\mapsto P(0)Q(0)+P(1)Q(1)+P(2)Q(2)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer une base de l'orthogonal de $\mathbb{R}_1[X]$.

II.C - Familles orthogonales et orthonormées

Définition (Famille orthogonale) : Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite orthogonale si ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux, i.e.

$$\forall (i,j)\in I^2 \text{ avec } i\neq j,\quad (u_i\mid u_j)=0.$$

Remarque 6 : Par le théorème de Pythagore, on remarque que si $(u_1,\dots,u_p)$ est une famille orthogonale de E, alors on a

$$\left\|\sum_{k=1}^{p} u_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{p}\|u_k\|^2.$$

Proposition 3 : Toute famille orthogonale (finie) de vecteurs non nuls est libre.

Exercice 6 : On considère le produit scalaire $\varphi:(f,g)\mapsto\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sur $E=\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$. On considère également un entier $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on note $u_k\in E$ la fonction définie par $u_k:t\mapsto\cos(kt)$.

1. Montrer que $\mathscr{F}=(u_0,\dots,u_n)$ est une famille orthogonale de E.
2. En déduire que $\mathscr{F}$ est une famille libre.

Définition (Famille orthonormée) : Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite orthonormée (ou orthonormale) si elle est orthogonale et que $\|u_i\|=1$ pour tout indice $i\in I$.

Exemple 6 : La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée pour le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème de Gram-Schmidt : Soit $(v_1,\dots,v_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Il existe une unique famille orthonormale $(e_1,\dots,e_p)$ de E vérifiant

$$\forall k\in[\![1,p]\!],\quad \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_k)=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)\quad\text{et}\quad (e_k\mid v_k)>0.$$

Remarque 7 : La démonstration du théorème ci-dessus est basée sur l'algorithme de Gram-Schmidt qui est détaillé dans la dernière partie.

II.D - Méthode - L'algorithme de Gram-Schmidt

On considère une famille libre $(v_1,\dots,v_p)$ d'un espace préhilbertien E. Dans cette partie, on présente l'algorithme de Gram-Schmidt qui permet de construire la famille orthonormée $(e_1,\dots,e_p)$ du théorème de Gram-Schmidt à partir de la famille libre $(v_1,\dots,v_p)$.

On commence par construire une famille orthogonale $(u_1,\dots,u_p)$ de E vérifiant les conditions du théorème.

1) On pose $u_1 = v_1$.
2) On cherche le vecteur u_2 sous la forme
$$u_2 = v_2 + a u_1 \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$
On souhaite que u_2 et u_1 soient orthogonaux, i.e.
$$(u_2 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v_2 \mid u_1) + a(u_1 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{(v_2 \mid u_1)}{(u_1 \mid u_1)},$$
ce qui permet de calculer u_2.
3) On itère le procédé : si on a construit $(u_1,\dots,u_{k-1})$, on cherche le vecteur u_k sous la forme
$$u_k = v_k + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{k-1} u_{k-1} \quad \text{avec} \quad \lambda_1,\dots,\lambda_{k-1} \in \mathbb{R}.$$
Pour chaque indice $i \in [\![1, k-1]\!]$, on souhaite que le vecteur u_k soit orthogonale à u_i, i.e.
$$(u_k \mid u_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v_k \mid u_i) + \lambda_i (u_i \mid u_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i = -\frac{(v_k \mid u_i)}{(u_i \mid u_i)},$$
ce qui permet de calculer u_k.
4) A la fin du procédé, on a construit une famille orthogonale $(u_1,\dots,u_p)$ de vecteurs non nuls vérifiant les conditions du théorème de Gram-Schmidt. On en déduit la famille orthonormée $(e_1,\dots,e_p)$ cherchée en normalisant les vecteurs u_i
$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}.$$

Exemple 7 : On cherche une base orthonormée de l'espace vectoriel
$$H = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \quad \text{où} \quad v_1 = (1,0,1) \ \text{ et } \ v_2 = (1,1,0)$$
muni de la restriction du produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^3$. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt en partant de la base (v_1, v_2) de H.

1) On pose $u_1 = v_1 = (1,0,1)$.
2) On cherche le vecteur u_2 sous la forme
$$u_2 = v_2 + a u_1 \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$
On souhaite que u_2 et u_1 soient orthogonaux, i.e.
$$(u_2 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v_2 \mid u_1) + a(u_1 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{(v_2 \mid u_1)}{(u_1 \mid u_1)} = -\frac{1}{2}.$$
On en déduit que
$$u_2 = v_2 - \frac{1}{2} u_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right).$$
3) La famille (u_1, u_2) est une base orthogonale de H et on en déduit une base orthonormée (e_1, e_2) de H avec
$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \qquad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1).$$

Exemple 8 : On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$(P,Q) \mapsto (P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nous allons construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt en partant de la base $(V_0, V_1, V_2) = (1, X, X^2)$.

1) On pose $U_0 = V_0 = 1$.
2) On cherche le polynôme U_1 sous la forme

$$U_1 = V_1 + aU_0 \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

On souhaite que U_0 et U_1 soient orthogonaux, i.e.

$$(U_1 \mid U_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (V_1 \mid U_0) + a(U_0 \mid U_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{(V_1 \mid U_0)}{(U_0 \mid U_0)} = 0.$$

On en déduit que $U_1 = X$.
3) On cherche le polynôme U_2 sous la forme

$$U_2 = V_2 + bU_1 + cU_0 \quad \text{avec} \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

On souhaite que U_2 soit orthogonal à U_0 et à U_1, donc

$$(U_2 \mid U_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (V_2 \mid U_0) + c(U_0 \mid U_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -\frac{(V_2 \mid U_0)}{(U_0 \mid U_0)} = -\frac{1}{3}.$$

$$(U_2 \mid U_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (V_2 \mid U_1) + b(U_1 \mid U_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{(V_2 \mid U_1)}{(U_1 \mid U_1)} = 0.$$

On en déduit que $U_2 = X^2 - 1/3$.
4) La famille (U_0, U_1, U_2) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ et on en déduit une base orthonormée (E_0, E_1, E_2) de l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$ avec

$$E_0 = \frac{U_0}{\|U_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad E_1 = \frac{U_1}{\|U_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}X, \qquad E_2 = \frac{U_2}{\|U_2\|} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(3X^2 - 1\right).$$

Exercice 7 : On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire euclidien canonique. Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel

$$F = \mathrm{Vect}\big((1,0,1,-1),(0,1,1,0)\big).$$

Exercice 8 : On considère sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ le produit scalaire

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad (P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer une base orthonormée de E.

II.E - Bases orthonormées d'un espace euclidien

Corollaire 1 : Si E est un espace euclidien, alors il existe une base orthonormée de E.

Théorème de la base orthonormée incomplète : Toute famille orthonormale $(e_1,\dots,e_p)$ de E peut se compléter en une base orthonormale $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ de E.

Théorème (Expressions dans une base orthonormée) : Soit $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E.

(i) Les coordonnées de tout vecteur $x\in E$ dans la base $\mathscr{B}$ sont $(x\mid e_1),\dots,(x\mid e_n)$, i.e.

$$\forall x\in E,\quad x=\sum_{k=1}^{n}(x\mid e_k)e_k.$$

(ii) Pour tout couple de vecteurs $(x,y)\in E^2$, si on note

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\qquad\text{et}\qquad Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

les coordonnées respectives des vecteurs x et y dans la base $\mathscr{B}$, alors on a

$$(x\mid y)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k=X^\top Y\quad\text{et}\quad \|x\|^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2=X^\top X.$$

Remarque 8 : Autrement dit, une fois qu'on a choisi une base orthonormée d'un espace euclidien E, on est ramené à travailler dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien canonique.

Exercice 9 : On considère le produit scalaire $\varphi:(P,Q)\mapsto P(0)Q(0)+P(1)Q(1)+P(2)Q(2)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $\mathscr{B}=\big((X-1)(X-2),X(X-2),X(X-1)\big)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. En déduire une base orthonormée $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Décomposer le polynôme X^2 dans la base $\mathscr{C}$.

Exercice 10 : Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E. Montrer pour tout $f\in\mathscr{L}(E)$ que

$$\operatorname{tr}(f)=\sum_{i=1}^{n}(f(e_i)\mid e_i).$$

Partie III Projection orthogonale

Dans cette partie, on considère un espace préhilbertien E.

III.A - Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

Proposition 4 : Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors on a la décomposition $E = F \oplus F^{\perp}$.

ATTENTION : L'hypothèse de dimension finie est importante : on n'a pas $E = F + F^{\perp}$ en général.

Corollaire 2 : Si E est un espace euclidien et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right).$$

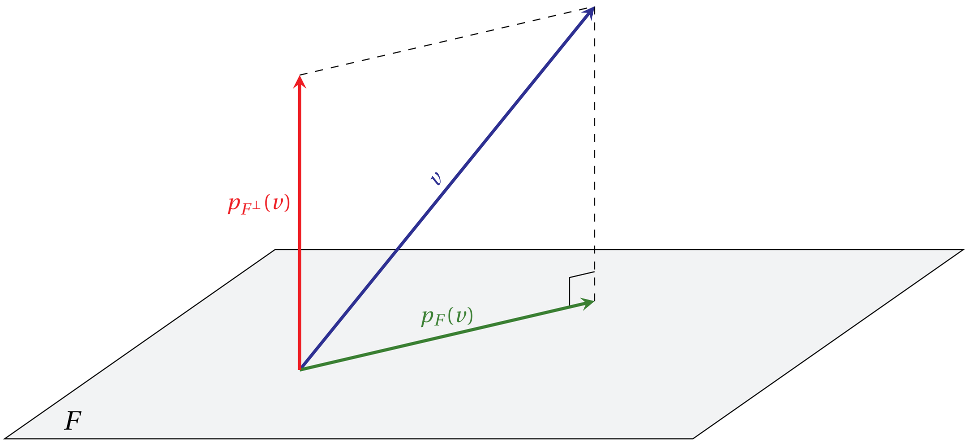
Exercice 11 : On considère sur $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $F^{\perp} = \{0_E\}$.

Définition (Projection orthogonale) : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. La projection orthogonale sur F est le projecteur $p_F : E \to E$ sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Illustration : La figure suivante représente géométriquement le projeté orthogonal d'un vecteur $v \in E$ sur F.



Remarques 9 :

a) On a la relation $p_F + p_{F^{\perp}} = \mathrm{Id}_E$.

b) Le projeté orthogonal d'un vecteur $v \in E$ sur F est l'unique vecteur $f \in F$ tel que $v - f \in F^{\perp}$.

Exemple 9 : On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien canonique. Déterminons la projection orthogonale d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ sur le sous-espace vectoriel

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}.$$

Par définition, la projection orthogonale du vecteur v sur H est caractérisée par les deux conditions

$$p_H(v) \in H \quad \text{et} \quad v - p_H(v) \in H^\perp.$$

En notant $v=(x,y,z)$ et $(a,b,c)=p_H(v)$ et en remarquant que $H = \mathrm{Vect}(h_1,h_2)$ avec $h_1=(1,-1,0)$ et $h_2=(1,0,-1)$, les deux conditions précédentes sont équivalentes au système linéaire

$$\left\{\begin{array}{c} p_H(v) \in H \\ (v-p_H(v) \mid h_1) = 0 \\ (v-p_H(v) \mid h_2)=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 0 \\ (x-a)-(y-b) &=& 0 \\ (x-a)-(z-c) &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& \dfrac{2x-y-z}{3} \\ b &=& \dfrac{-x+2y-z}{3} \\ c &=& \dfrac{-x-y+2z}{3}. \end{array}\right.$$

On conclut que le projeté orthogonal de $v=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sur H est

$$p_H(x,y,z) = \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right).$$

Proposition (Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée) : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormée de F, alors

$$\forall v \in E, \quad p_F(v) = \sum_{i=1}^{p} (v \mid e_i) e_i.$$

Exemple 10 : En reprenant l'exemple précédent, on obtient avec l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à la famille (h_1,h_2) qu'une base orthonormée du sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^3$ est (e_1,e_2) avec

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

On en déduit avec la proposition précédente que pour tout $v=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} p_H(v) &= (v \mid e_1)e_1 + (v \mid e_2)e_2 \\ &= \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{x+y-2z}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x-y-z\\-x+2y-z\\-x-y+2z\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque 10 : Si on a $\dim\left(F^\perp\right) < \dim(F)$ et que l'on dispose d'une base du sous-espace vectoriel $F^\perp$, alors il est plus rapide de calculer le projecteur $p_{F^\perp}$ avec la formule précédente, puis d'en déduire le projecteur p_F avec la relation $p_F = \mathrm{Id}_E - p_{F^\perp}$.

Exemple 11 : En reprenant l'exemple précédent, on obtient directement qu'une base orthonormée de la droite vectorielle $D = H^{\perp} = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$ est le vecteur e avec

$$e = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

On en déduit avec la proposition précédente que pour tout vecteur $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$p_D(v) = (v \mid e)e = \frac{x+y+z}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}x+y+z\\x+y+z\\x+y+z\end{pmatrix}.$$

On conclut que pour tout vecteur $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$p_H(v) = v - p_D(v) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}x+y+z\\x+y+z\\x+y+z\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x-y-z\\-x+2y-z\\-x-y+2z\end{pmatrix}.$$

Exercice 12 : On considère le produit scalaire $\varphi : (P,Q) \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ en utilisant chacune des trois méthodes vues dans cette sous-partie.

III.B - Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

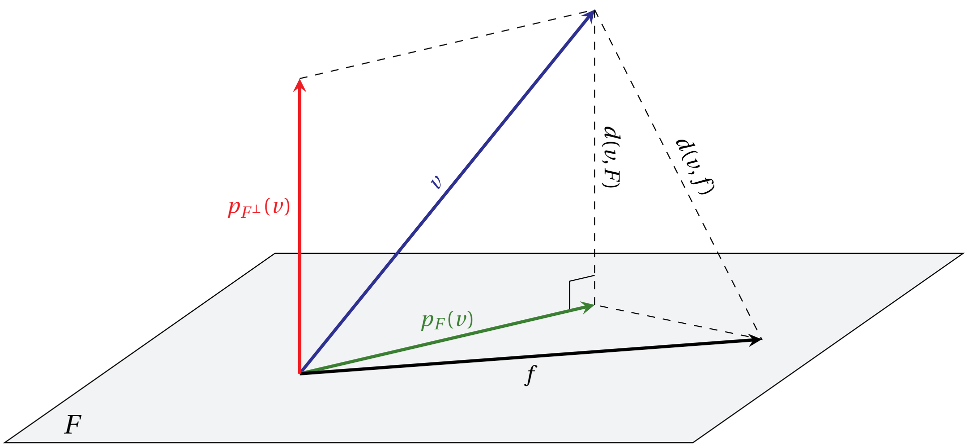
Définition (Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel) : La distance d'un vecteur $v \in E$ à un sous espace vectoriel F de E est le nombre

$$d(v,F) = \inf_{f\in F} \|v - f\| = \inf_{f\in F} d(v, f).$$

Théorème 1 : Soit $v \in E$. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors

$$d(v,F) = \big\|v - p_F(v)\big\| = \big\|p_{F^{\perp}}(v)\big\|.$$

Illustration : On peut représenter géométriquement le théorème sur la figure suivante.



Exemple 12 : On souhaite calculer la distance du vecteur $(1,0,0)$ au sous-espace vectoriel

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$$

de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien canonique. En reprenant l'expression du projecteur calculé précédemment, on a

$$d\big((1,0,0),H\big) = \|(1,0,0) - p_H(1,0,0)\| = \left\|(1,0,0) - \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 13 : On considère le produit scalaire $\varphi : (P,Q) \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la distance de X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$.

Partie IV Formes linéaires et hyperplans dans un espace euclidien

Théorème de représentation des formes linéaires : Soit E un espace euclidien. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur E, alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $f(x) = (a \mid x)$ pour tout $x \in E$.

Remarque 11 : Par définition, si H est un hyperplan d'un espace euclidien, alors H est le noyau d'une forme linéaire non nulle $f : E \to \mathbb{R}$. Par le théorème précédent, on en déduit qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (a \mid x).$$

En particulier, pour tout $x \in H$, on a $(a \mid x) = f(x) = 0_E$, donc $a \in H^\perp$. De plus, comme f est non nulle, le vecteur a n'est pas nul et comme $\dim(H^\perp) = \dim(E) - \dim(H) = 1$, on conclut que $H^\perp = \mathrm{Vect}(a)$.

Définition (Vecteur normal à un hyperplan d'un espace euclidien) : On dit que $a \in E$ est un vecteur normal d'un hyperplan H dans un espace euclidien E si $H^\perp = \mathrm{Vect}(a)$.

Théorème (Projection orthogonale sur un hyperplan) : Si a est un vecteur normal d'un hyperplan H dans un espace euclidien E, alors

$$\forall v \in E, \qquad p_H(v) = v - \frac{(v \mid a)}{\|a\|^2} a, \qquad d(v,H) = \frac{|(v \mid a)|}{\|a\|}.$$

Exercice 14 : On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien canonique. On considère un élément non nul $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et l'hyperplan

$$H = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\big\}.$$

Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$d(y,H) = \frac{\left|a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n\right|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

Remarque 12 : On retrouve la formule connue dans le cas des espaces euclidiens $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.