TD 14 Équations différentielles linéaires du second ordre

Partie I Révisions - Équations différentielles d'ordre 1

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$(i)\ \ y'+y=2\sin(t),\qquad (ii)\ \ y'+2y=t^2-2t+3,$$
$$(iii)\ \ \left(1+\mathrm{e}^t\right)y'+\mathrm{e}^t y=1+\mathrm{e}^t,\qquad (iv)\ \ \left(t^2+1\right)y'-ty=\left(t^2+1\right)^{3/2}.$$

Exercice 2 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$(i)\ \ ty'-2y=t^3,\qquad (ii)\ \ t^2y'-y=0,\qquad (iii)\ \ ty'+y=1.$$

Exercice 3 : Déterminer les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+1.$$

Exercice 4 : Déterminer les fonctions dérivables $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)+f(x)+\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

Exercice 5 : Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$f(0)=0\quad\text{et}\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)\geqslant f(x).$$

Montrer que $f(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$.

Partie II Révisions - Équations différentielles d'ordre 2

Exercice 6 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$(i)\ \ y''-4y'+3y=\mathrm{e}^t,\qquad (ii)\ \ y''+9y=t+1,$$
$$(iii)\ \ y''-2y'+y=t+2\mathrm{e}^t,\qquad (iv)\ \ y''+2y'+2y=\sin(t),$$
$$(v)\ \ y''-3y'+2y=\sin(2t),\qquad (vi)\ \ y''-2y'+2y=\mathrm{e}^t\cos(t).$$

Exercice 7 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$\left(1+\mathrm{e}^t\right)y''+2\mathrm{e}^t y'+\left(2\mathrm{e}^t+1\right)y=\mathrm{e}^t.\qquad (E)$$

1. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z:t\mapsto\left(1+\mathrm{e}^t\right)y(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on précisera.
2. En déduire les solutions de (E).

Exercice 8 : On considère sur $I=\,]0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2y''-3xy'+4y=0.\qquad (E)$$

1. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z:t\mapsto y\left(\mathrm{e}^t\right)$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on précisera.
2. En déduire les solutions de (E) sur I.

Exercice 9 : On considère sur $I=\,]-1,1[$ l'équation différentielle

$$\left(1-x^2\right)y''-xy'+y=0.\qquad (E)$$

1. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z:t\mapsto y(\sin(t))$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on précisera.
2. En déduire les solutions de (E) sur I.

Exercice 10 : Déterminer les fonctions dérivables $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)+f(-x)=\mathrm{e}^x.$$

Partie III Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 11 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$\left(t^2-3\right)y''-4ty'+6y=0. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E).
2. En déduire les solutions de (E) sur les intervalles de $\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{3}\}$.
3. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$\left(t^2+1\right)y''-2y=0. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E).
2. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$t^2y''+ty'-y=1. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation homogène (H).
2. En déduire les solutions de (E) sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : Soit $k\in\mathbb{N}$. On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$\left(1-t^2\right)y''-2ty'+k(k+1)y=0. \qquad (E)$$

1. Montrer que (E) admet une solution polynomiale non nulle P_k.
2. Soit $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ une solution de (E).
   (a) Montrer que la fonction $\omega: t\mapsto f(t)P_k'(t)-P_k(t)f'(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur l'intervalle $[-1,1]$.
   (b) En déduire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=\lambda P_k(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 15 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$ty''-y'+4t^3y=0. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (E).
2. En déduire les solutions de (E) sur les intervalles de $\mathbb{R}^*$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$ty''+2y'-ty=t. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (E).
2. En déduire les solutions de (E) sur les intervalles de $\mathbb{R}^*$.
3. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$x(1-x)y''+(1-3x)y'-y=0. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (E).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 : Déterminer les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=-1-\int_0^x(2x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 19 : Soient $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ une fonction continue non nulle et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ y''+q(t)y=0$.

1. Montrer que si f est strictement positive, alors f est concave.
2. En déduire que f n'est pas strictement positive.
3. Conclure que toute solution de (E) s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.