Mathématiques

PSI

Lycée Couffignal

CHAPITRE 14

Équations différentielles linéaires du second ordre

Plan du chapitre

Introduction

Une équation différentielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est une équation dont l'inconnue est une fonction $y : I \to \mathbb{R}^d$ dérivable n fois et se présentant sous la forme

$$\forall t \in I, \quad f\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)\right) = 0$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est une fonction continue sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^d\right)^{n+1}$. Dans les applications, les fonctions représentent généralement des quantités physiques, leurs dérivées représentent leurs taux d'évolution et l'équation différentielle est une relation entre les deux.

La notion d'équation différentielle est née à la fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle lorsque Newton et Leibniz fondèrent le calcul différentiel et le calcul intégral : de nombreux problèmes issus de la géométrie ou de la mécanique conduisaient naturellement à la résolution de systèmes différentiels. À cette époque, résoudre une équation différentielle consistait à écrire la solution générale de l'équation avec des fonctions élémentaires.

Au cours du XVIII$^{\text{e}}$ siècle, de nombreuses équations différentielles (linéaires, de Bernoulli, de Ricatti,...) ont été résolues. En parallèle, une nouvelle méthode de résolution (que nous étudierons) se développe : elle repose sur la recherche des solutions sous la forme d'une série entière. Cependant cette dernière n'est pas employée rigoureusement : les mathématiciens de cette période ne se préoccupent pas de la convergence de ces séries, considérant qu'elles convergent inconditionnellement.

Jusqu'au XIX$^{\text{e}}$siècle, l'existence des solutions d'une équation différentielle était communément admise et on ne cherchait pas en général à préciser les domaines où ses solutions étaient définies. C'est Cauchy qui étudia pour la première fois ces problèmes dans les cours qu'il dispensait à l'École Royale Polytechnique à partir de 1820. Il montre, sous de bonnes hypothèses, l'existence et l'unicité d'une solution dans le voisinage d'un point donné. En 1868, Lipschitz remarqua que le résultat de Cauchy subsiste avec des hypothèses plus faibles.

Les équations différentielles jouent un rôle de premier plan dans de nombreuses disciplines, notamment l'ingénierie, la physique, l'économie et la biologie. Leur importance amena naturellement cette branche des mathématiques à devenir l'une des plus importantes de nos jours.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les équations différentielles linéaires scalaires du second ordre et quelques méthodes de résolution de ces équations dans certains cas favorables.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Dans cette partie, on fixe un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts et on considère des fonction continues $a, b, c : I \to \mathbb{K}$. Nous allons étudier l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 définie par

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \qquad (E)$$

dont l'inconnue est une fonction deux fois dérivable $y : I \to \mathbb{K}$.

Remarque 1 : On sait résoudre l'équation différentielle (E) lorsque les fonctions a et b sont constantes et la fonction c est polynomiale ou de la forme $c : t \mapsto Ae^{\lambda t}$ où $(A, \lambda) \in \mathbb{K}^2$.

Exemple 1 : La tension u_C aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC vérifie l'équation différentielle

$$LC\frac{\partial^2 u_C}{\partial t^2} + RC\frac{\partial u_C}{\partial t} + u_C = U(t).$$

I.A - Problème de Cauchy

Rappelons qu'un problème de Cauchy est un système composé d'une équation différentielle et d'une ou plusieurs conditions initiales.

Théorème de Cauchy : Soient $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' + a(t)y' + b(t)y & = & c(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t_0) & = & y_1 \end{array} \right.$$

admet une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$.

DÉMONSTRATION HORS PROGRAMME

Remarque 2 : La méthode d'Euler permet de construire une solution approchée du problème de Cauchy.

I.B - Structure de l'ensemble des solutions

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.

Définition (Équation homogène) : L'équation homogène associée à l'équation différentielle (E) est l'équation différentielle linéaire

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0. \qquad (H)$$

Théorème de structure de l'ensemble des solutions :

(i) L'ensemble des solutions de l'équation (H) est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.

(ii) Si $y_p : I \to \mathbb{K}$ est une solution (particulière) de (E), alors les solutions de l'équation (E) sont exactement les fonctions de la forme $y = y_h + y_p$ où $y_h : I \to \mathbb{K}$ est une solution de l'équation homogène (H).

Remarque 3 : On déduit du théorème précédent que si $y_1 : I \to \mathbb{K}$ et $y_2 : I \to \mathbb{K}$ sont deux solutions de (H) non colinéaires, alors (y_1, y_2) est une base de l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_H$ de (H). On en déduit que

$$\mathscr{S}_H = \left\{ \alpha y_1 + \beta y_2 : I \to \mathbb{K} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

Exemple 2 : On considère sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante avec son équation homogène associée :

$$y'' - \frac{2}{t^2}y = -\frac{3}{t^3} \qquad (E) \qquad \text{et} \qquad y'' - \frac{2}{t^2}y = 0. \qquad (H)$$

Comme les fonctions $t \mapsto t^{-1}$ et $t \mapsto t^2$ sont des solutions de (H) non colinéaires, on en déduit avec le (i) du théorème que les solutions de (H) sont exactement les fonctions $y_h : I \to \mathbb{R}$ de la forme

$$y_h(t) = \frac{\alpha}{t} + \beta t^2 \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

De plus, comme la fonction $y_p : t \mapsto t^{-1}\ln(t)$ est une solution de (E), on en déduit avec le (ii) du théorème que les solutions de (E) sont exactement les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ de la forme

$$y(t) = \frac{\alpha}{t} + \beta t^2 + \frac{\ln(t)}{t} \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 1 : Soit $a>0$. On considère sur $I=]0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2y''+xy'-a^2y=0. \qquad (E)$$

1) Déterminer les solutions de (E) de la forme $y: x\mapsto x^p$ pour $p\in\mathbb{R}$.
2) En déduire les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.

Proposition (Principe de superposition) : Soient $c_1: I\to\mathbb{K}$ et $c_2: I\to\mathbb{K}$ deux fonctions continues. On suppose que $y_1: I\to\mathbb{K}$ et $y_2: I\to\mathbb{K}$ sont respectivement solutions des équations différentielles

$$y''+a(t)y'+b(t)y=c_1(t) \quad \text{et} \quad y''+a(t)y'+b(t)y=c_2(t).$$

Alors pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda y_1+\mu y_2: I\to\mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle

$$y''+a(t)y'+b(t)y=\lambda c_1(t)+\mu c_2(t).$$

Exemple 3 : On souhaite résoudre sur $I=\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y''+2y'+y=3\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-t}. \qquad (E)$$

- L'équation homogène (H) associée est $y''+2y'+y=0$. Comme il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, on peut considérer son équation caractéristique $r^2+2r+1=0$. Le discriminant de cette équation est nul et son unique racine est $r=-1$, donc les solutions de (H) sont les fonctions $y_h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de la forme

$$y_h(t)=(\alpha t+\beta)\mathrm{e}^{-t} \quad \text{avec} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

- Pour déterminer une solution particulière de (E), il suffit d'après le principe de superposition de déterminer une solution de chacune des deux équations différentielles suivantes

$$y''+2y'+y=\mathrm{e}^{2t} \qquad (E_1) \qquad \text{et} \qquad y''+2y'+y=\mathrm{e}^{-t}. \qquad (E_2)$$

1) Comme 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on sait d'après une propriété vue en première année que (E_1) admet une solution de la forme $y_1: t\mapsto A\mathrm{e}^{2t}$. En injectant y_1 dans l'équation (E_1), on obtient que $A=1/9$, donc une solution de (E_1) est

$$y_1(t)=\frac{1}{9}\mathrm{e}^{2t}.$$

2) Comme -1 est racine double de l'équation caractéristique, on sait d'après une propriété vue en première année que (E_2) admet une solution de la forme $y_2: t\mapsto Bt^2\mathrm{e}^{-t}$. En injectant y_2 dans l'équation (E_2), on obtient que $B=1/2$, donc une solution de (E_2) est

$$y_2(t)=\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-t}.$$

Par le principe de superposition, on en déduit qu'une solution particulière de (E) est

$$y_p(t)=3y_1(t)+y_2(t)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-t}.$$

Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de la forme

$$y(t)=(\alpha t+\beta)\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-t} \quad \text{avec} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

Partie II Méthodes de résolution

Lorsque l'équation différentielle (E) n'est pas à coefficients constants, il n'existe pas de méthode de résolution systématique. Voici cependant quelques techniques à connaître. Dans la majorité des exercices, on se laissera guider par l'énoncé.

II.A - Recherche des solutions polynômiales

On peut déterminer les solutions polynomiales de (E) en procédant de la manière suivante.

1) On détermine les degrés possibles pour une éventuelle fonction polynomiale solution de (E).
2) On substitue dans l'équation (E) et on identifie les coefficients.

Exemple 4 : Cherchons les solutions polynomiales de l'équation différentielle

$$t(t+1)y'' + (t-1)y' - y = 0. \qquad (E)$$

Supposons qu'il existe une fonction polynomiale P de degré $d \in \mathbb{N}$ solution de (E). Si on note $a_d t^d$ avec $a_d \neq 0$ le terme dominant de P, alors le coefficient du monôme de degré d de

$$t(t+1)P'' + (t-1)P' - P \quad \text{est} \quad \big(d(d-1) + d - 1\big)a_d.$$

Comme P est solution de (E) et que $a_d \neq 0$, on obtient donc

$$d(d-1) + d - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 1.$$

Ainsi, P est de degré 1, donc il s'écrit $P(t) = at + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. En substituant dans (E), on obtient

$$(t-1)a - (at + b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -a.$$

On conclut que les solutions polynomiales de (E) sont les fonctions

$$P(t) = a(t-1) \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Remarque 4 : Une équation différentielle n'admet pas nécessairement des solutions polynomiales.

Exercice 2 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(t+1)^2 y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0. \qquad (E)$$

1) Déterminer les solutions polynomiales de (E).
2) En déduire les solutions de (E) sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$.
3) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

II.B - Recherche des solutions développables en série entière

On peut déterminer les solutions développables en série entière de (E) en raisonnant par analyse et synthèse.

1) *Analyse :* On suppose qu'il existe une solution y de (E) sous la forme d'une série entière admettant un rayon de convergence $R>0$, i.e.
$$\forall t \in]-R,R[, \quad y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$
2) En substituant $y(t)$ dans (E), on détermine une relation de récurrence pour les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Si possible, on détermine une expression explicite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4) *Synthèse :* Réciproquement, on vérifie que la fonction obtenue à la fin de l'analyse est bien définie.
   a) Si le rayon de convergence de la série entière obtenue est nul, alors il n'y a pas de solution de (E) développable en série entière.
   b) Si le rayon de convergence R de la série entière est non nul, alors y est une solution de (E) développable en série entière sur $]-R,R[$.

Exemple 5 : Cherchons les solutions développables en série entière de l'équation différentielle
$$y''+2ty'+2y=0. \qquad (E)$$
Analyse : On suppose qu'il existe une solution y de (E) sous la forme d'une série entière admettant un rayon de convergence $R>0$, i.e.
$$\forall t \in]-R,R[, \quad y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$
En substituant dans (E), on obtient
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}+2t\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1}+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n=0.$$
En effectuant un changement d'indice dans la première somme, on obtient
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n+2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(2n+2)a_n\right]t^n=0.$$
Par unicité du développement en série entière, on en déduit la relation
$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2}+(2n+2)a_n=0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad a_{n+2}=-\frac{2}{n+2}a_n.$$
On en déduit que l'on a l'expression explicite suivante
$$\forall p\in\mathbb{N}, \quad a_{2p}=\frac{(-1)^p}{p!}a_0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1}=\frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}a_1.$$
On conclut que si y est solution de (E), alors on a nécessairement
$$y(t)=a_0\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!}t^{2p}+a_1\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}t^{2p+1}=a_0\exp(-t^2)+a_1\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}t^{2p+1}.$$
Synthèse : Les deux séries entières ci-dessus ont pour rayon de convergence $+\infty$. Ainsi, les solutions de (E) développable en série entière sont les fonctions
$$y(t)=A\exp(-t^2)+B\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}t^{2p+1} \quad \text{avec} \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$
Dans ce cas, comme on sait d'après le cours que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2, on conclut qu'il n'y a pas d'autre solution à l'équation différentielle (E) que celles ci-dessus.

Exemple 6 : Cherchons les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$t^2 y' + (t-1)y = 1. \qquad (E)$$

Analyse : On suppose qu'il existe une solution y de (E) sous la forme d'une série entière admettant un rayon de convergence $R > 0$, i.e.

$$\forall t \in]-R, R[, \quad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

En substituant dans (E) et en effectuant les changements d'indice adéquat, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[n a_{n-1} - a_n\right] t^n = 1.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit la relation

$$\left(a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n a_{n-1} - a_n = 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = n a_{n-1}\right).$$

On en déduit que $a_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On conclut que si y est solution de (E), alors on a nécessairement

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n! t^n.$$

Synthèse : Le rayon de convergence de la série entière ci-dessus est 0. Ainsi l'équation différentielle (E) n'admet aucune solution développable en série entière.

Exercice 3 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$\left(1+t^2\right) y'' + 4t y' + 2y = 0. \qquad (E)$$

1) Déterminer les solutions développables en série entière de (E).
2) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

II.C - Méthode de la variation de la constante

Supposons que l'on dispose d'une solution $h : I \to \mathbb{K}$ de l'équation homogène (H) associée à (E) qui ne s'annule pas sur I. Dans ce cas, on peut appliquer la méthode ci-dessous qui généralise celle utilisée pour résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 1.

1) Comme h ne s'annule pas sur I, on peut définir $\lambda : I \to \mathbb{R}$ qui est deux fois dérivable par $y = \lambda h$.
2) En injectant la relation $y = \lambda h$ dans l'équation différentielle (E), on obtient que la fonction λ' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur I.
3) En résolvant cette nouvelle équation, on en déduit une expression de λ', puis de λ et finalement on obtient toutes les solutions de (E) sur I avec la relation $y = \lambda h$.

Exemple 7 : Nous allons résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y'' - \frac{3}{t}y' + \frac{4}{t^2}y = t \quad \Leftrightarrow \quad t^2 y'' - 3ty' + 4y = t^3. \qquad (E)$$

On remarque que $h : t \mapsto t^2$ est solution de l'équation homogène (H) associée à (E). Comme la fonction h ne s'annule pas sur l'intervalle I, on peut appliquer la méthode de la variation de la constante pour en déduire toutes les solutions de (E). On remplace $y = \lambda h$ dans (E) où $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad t^2\left(\lambda'' h + 2\lambda' h' + \lambda h''\right) - 3t\left(\lambda' h + \lambda h'\right) + 4\lambda h = t^3 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2 h \lambda'' + \left(2t^2 h' - 3th\right)\lambda' + \underbrace{\left(t^2 h'' - 3th' + 4h\right)}_{0 \text{ car } h \text{ est solution de } (H)} \lambda = t^3 \\
&\Leftrightarrow \quad t^4 \lambda'' + \left(4t^3 - 3t^3\right)\lambda' = t^3 \\
&\Leftrightarrow \quad t\lambda'' + \lambda' = 1.
\end{aligned}$$

En notant $\mu = \lambda'$ et en résolvant l'équation différentielle $t\mu' + \mu = 1$, on obtient

$$\lambda'(t) = \mu(t) = \frac{A}{t} + 1 \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R}.$$

On en déduit qu'on a

$$\lambda(t) = A\ln(t) + t + B \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement, on en déduit les solutions y de (E) sur I sont

$$y(t) = t^2\lambda(t) = At^2\ln(t) + Bt^2 + t^3 \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 4 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$ty'' - (1+t)y' + y = 0. \qquad (E)$$

1) Déterminer les solutions polynomiales de (E).
2) En déduire les solutions de (E) sur les intervalles de $\mathbb{R}^*$.
3) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.