CHAPITRE 13

Endomorphismes d'un espace euclidien

Jérôme VON BUHREN
http://vonbuhren.free.fr

Lycée Couffignal - PSI*

Ce chapitre est le prolongement du chapitre sur les espaces préhilbertiens. Nous allons étudier les endomorphismes d'un espace euclidien préservant la norme des vecteurs : les isométries. Nous nous intéresserons notamment à leur classification en petite dimension. Finalement, nous étudierons une famille d'endomorphismes remarquables dans un espace euclidien et nous verrons leurs liens avec les matrices symétriques réelles.

Les isométries en dimension 2 et 3 sont souvent utilisées en science pour passer des coordonnées dans un repère orthonormé à celles dans un autre repère orthonormé.

Dans tout le chapitre, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un espace vectoriel euclidien E de dimension n.

Définition (Matrice orthogonale)

On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle vérifie $M^\top M = \mathrm{I}_n$.

Remarques 1

a) Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

b) Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs lignes forment une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

c) Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si elle est inversible et vérifie $M^{-1} = M^\top$.

Définition (Groupe orthogonal d'ordre n)

Le groupe orthogonal d'ordre n est l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On le note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$.

Exemple 1

Les deux matrices ci-dessous sont orthogonales.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}), \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}).$$

Théorème 1

L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, i.e. il vérifie les trois propriétés suivantes.

(i) La matrice I_n appartient à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(ii) Pour tout $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice M est inversible et on a $M^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(iii) Pour tout $(M, N) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^2$, on a $MN \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 1

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Une base $\mathscr{C}$ de E est orthonormée si et seulement si la matrice de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ est orthogonale.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 2

Si $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors on a $\det(M) = \pm 1$.

Définition (Groupe spécial orthogonal d'ordre n)

Le groupe spécial orthogonal d'ordre n est l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant est égal à 1. On le note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n)$.

Exemple 2

Les deux matrices ci-dessous sont orthogonales, mais seule la seconde est dans le groupe spécial orthogonal.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}), \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}).$$

Théorème 2

L'ensemble $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, i.e. il vérifie les trois propriétés suivantes.

(i) La matrice I_n appartient à $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

(ii) Pour tout $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, la matrice M est inversible et on a $M^{-1} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

(iii) Pour tout $(M, N) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})^2$, on a $MN \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Soit $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$. On considère la matrice

$$M = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & c \\ a & \sqrt{2} & d \\ \sqrt{3} & b & e \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1) Déterminer les éléments $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tels que $M \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.
2) Déterminer les éléments $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tels que $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Rappelons que si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux bases orthonormées de l'espace euclidien E, alors la matrice de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ est orthogonale d'après les résultats précédents, donc son déterminant est égal à ± 1.

Définition (Espace euclidien orienté)

Un espace euclidien orienté est un espace euclidien dans lequel on a choisi une base orthonormée $\mathscr{C}$ de E.

Définition (Base directe et indirecte)

Soit E un espace euclidien orienté par une base orthonormée $\mathscr{C}$. Une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E est dite

(i) directe si la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ est de déterminant 1 ;

(ii) indirecte si la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ est de déterminant -1.

Remarques 2

a) On dit que deux bases orthonormées $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de l'espace euclidien E définissent la même orientation si le déterminant de la matrice de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ est égal à 1. Dans ce cas, le choix de $\mathscr{B}$ ou de $\mathscr{C}$ pour orienter E induit les mêmes bases directes et les mêmes bases indirectes.

b) On en déduit qu'il y a deux orientations possibles pour un espace euclidien.

Exemple 3

Si l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est orienté par la base canonique (i, j, k), alors les bases (i, j, k), (j, k, i) et (k, i, j) sont directes, tandis que les bases (i, k, j), (k, j, i) et (j, i, k) sont indirectes.

Définition (Produit mixte dans un espace euclidien orienté)

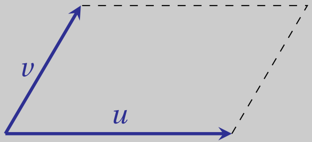
Soit E un espace euclidien de dimension n orienté par une base orthonormée $\mathscr{C}$. Le produit mixte d'une famille $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ de E, notée $[u_1, \ldots, u_n]$ est le nombre $\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F})$.

Remarques 3

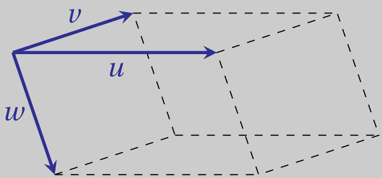
a) Une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de E est une base de E si et seulement si $[u_1, \ldots, u_n] \neq 0$.

b) Pour l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^2$, le produit mixte $[u, v]$ est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs u et v.

c) Pour l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$, le produit mixte $[u, v, w]$ est le volume algébrique du parallélépipède construit sur les vecteurs u, v et w.



Parallélogramme construit sur u et v



Parallélépipède construit sur u, v et w

Proposition 3

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille d'un espace euclidien orienté E de dimension n.

(i) Pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E, on a $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = [u_1, \dots, u_n]$.

(ii) Pour toute base orthonormée indirecte $\mathscr{B}$ de E, on a $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = -[u_1, \dots, u_n]$.

Définition (Isométrie vectorielle)

Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie vectorielle (ou un automorphisme orthogonal) si u conserve la norme des vecteurs, i.e.

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

Exemple 4

Les applications $\pm \mathrm{Id}_E \in \mathscr{L}(E)$ sont des isométries vectorielles.

Définition (Groupe orthogonal d'un espace euclidien)

Le groupe orthogonal de l'espace euclidien E est l'ensemble des isométries vectorielles de E. On le note $\mathrm{O}(E)$.

Théorème 3

L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ est un groupe, i.e. il vérifie les trois propriétés suivantes.

(i) L'endomorphisme Id_E appartient à $\mathrm{O}(E)$.

(ii) Pour tout $u \in \mathrm{O}(E)$, l'endomorphisme u est un isomorphisme et $u^{-1} \in \mathrm{O}(E)$.

(iii) Pour tout $(u, v) \in \mathrm{O}(E)^2$, on a $u \circ v \in \mathrm{O}(E)$.

Théorème de caractérisation des isométries

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) L'application u est une isométrie vectorielle.

(ii) L'application u conserve le produit scalaire, i.e.

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \big(u(x) \mid u(y)\big) = (x \mid y).$$

(iii) L'image de toute base orthonormée de E par u est une base orthonormée de E.

(iv) L'image d'une base orthonormée de E par u est une base orthonormée de E.

Proposition (Caractérisation matricielle des isométries)

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie vectorielle si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est orthogonale.

Remarque 4

Autrement dit, une fois que l'on a fixé une base orthonormée de E, les éléments de $\mathrm{O}(E)$ correspondent bijectivement via leur matrice aux éléments de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 4

Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par une isométrie vectorielle $u \in \mathscr{L}(E)$, alors le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est stable par u.

Exercice 3

Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ où E est un espace euclidien. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Proposition 5

Si $u \in \mathrm{O}(E)$, alors on a $\det(u) = \pm 1$.

Définition (Isométrie vectorielle directe / indirecte)

Une isométrie vectorielle $u \in \mathrm{O}(E)$ est dite directe si elle vérifie $\det(u) = 1$.
Dans le cas contraire, on dit qu'elle est indirecte.

Définition (Groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien)

Le groupe spécial orthogonal de l'espace euclidien E est l'ensemble des isométries vectorielles directes de E. On le note $\mathrm{SO}(E)$.

Remarque 5

D'après les résultats précédents, une fois que l'on a fixé une base orthonormée de E, les éléments de $\mathrm{SO}(E)$ correspondent bijectivement via leur matrice aux éléments de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 4

L'ensemble $\mathrm{SO}(E)$ est un groupe, i.e. il vérifie les trois propriétés suivantes.

(i) L'endomorphisme Id_E appartient à $\mathrm{SO}(E)$.

(ii) Pour tout $u \in \mathrm{SO}(E)$, l'endomorphisme u est un isomorphisme et $u^{-1} \in \mathrm{SO}(E)$.

(iii) Pour tout $(u, v) \in \mathrm{SO}(E)^2$, on a $u \circ v \in \mathrm{SO}(E)$.

Définition (Symétrie orthogonale)

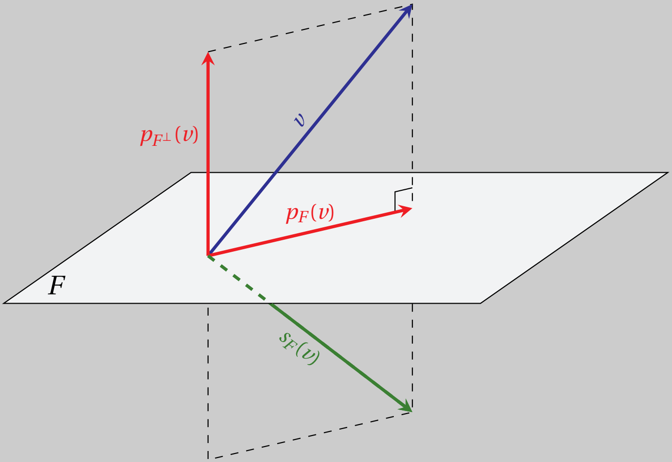
Soit F un sous-espace vectoriel de E. La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie $s_F : E \to E$ par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$.

Remarque 6

On a $s_F = p_F - p_{F^\perp} = 2p_F - \mathrm{Id}_E$.

Illustration

La figure suivante représente géométriquement la symétrie orthogonale par rapport à F.



Exemple 5

Dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens, on a vu que la projection orthogonale sur le plan vectoriel $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p_H(x,y,z) = \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right).$$

On en déduit avec la relation $s_H = 2p_H - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ que l'on a

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad s_H(x,y,z) = \left(\frac{x-2y-2z}{3}, \frac{-2x+y-2z}{3}, \frac{-2x-2y+z}{3}\right).$$

Proposition 6

Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.

Définition (Réflexion)

Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Exercice 4

Déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan H d'équation $x-2y+z=0$.

Exercice 5

Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ par rapport à la droite D dirigé par $(1,-2,2)$.

Exercice 6

Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ où E est un espace euclidien. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u est une symétrie orthogonale.

Dans cette partie, on considère un plan euclidien E orienté par une base orthonormée $\mathscr{C} = (i, j)$.

Théorème 5

On a les égalités suivantes.

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ R_\theta \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{où} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ S_\theta \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{où} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Remarques 7

a) Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif, car on a $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} R_\theta$ pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

b) En remarquant que $R_0 = \mathrm{I}_2$, on en déduit également que $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

c) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(R_\theta) = \left\{\mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{e}^{-i\theta}\right\}$.

d) On remarque que $S_\theta^2 = \mathrm{I}_2$, donc les éléments de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices de symétrie.

Théorème 6

Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ une isométrie d'un plan vectoriel euclidien orienté E.

(i) Si u est directe, alors il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(ii) Si u est indirecte, alors pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E, il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Remarque 8

Si on change l'orientation du plan choisi au début, le réel θ est remplacé par son opposé dans les deux propositions précédentes.

Illustration

Interprétons géométriquement le résultat du théorème précédent.

Isométrie directe

Si u est une isométrie directe, alors pour tout base orthonormée directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de E, on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(e_1) & = & \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \\ u(e_2) & = & -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2. \end{array}\right.$$

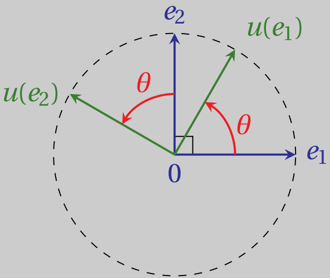
Isométrie indirecte

Si u est une isométrie indirecte, alors il existe une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de E telle que

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(e_1) & = & \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \\ u(e_2) & = & \sin(\theta)e_1 - \cos(\theta)e_2. \end{array}\right.$$

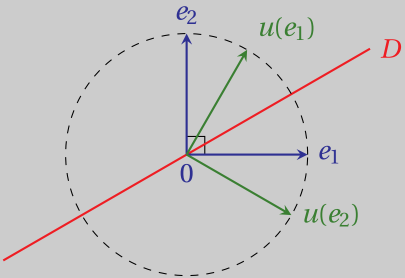
Illustration

Ces relations se reproduisent géométriquement.



On dit que l'isométrie directe u est la rotation vectorielle d'angle θ.

Ces relations se reproduisent géométriquement.



On conclut qu'une isométrie indirecte du plan est une réflexion par rapport à une droite vectorielle D.

Bilan

Le tableau suivant résume la situation pour une isométrie $u \in \mathrm{O}(E)$ d'un plan euclidien orienté.

Type	Nature	Valeurs propres réelles	Compléments
Directe	$u = \mathrm{Id}_E$ est la rotation d'angle $\theta = 0\ [2\pi]$	$\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$	$E_1(u) = E$
	$u = -\mathrm{Id}_E$ est la rotation d'angle $\theta = \pi\ [2\pi]$	$\mathrm{Sp}(u) = \{-1\}$	$E_{-1}(u) = E$
	u est la rotation d'angle $\theta \neq 0\ [\pi]$	$\mathrm{Sp}(u) = \varnothing$	Les valeurs propres complexes sont $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$.
Indirecte	u est la réflexion par rapport à D	$\mathrm{Sp}(u) = \{\pm 1\}$	$E_1(u) = D$ $E_{-1}(u) = D^{\perp}$

Exemple 6

Déterminons la nature de l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

En notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$, on remarque que la matrice M est orthogonale et que $\det(M) = 1$. On en déduit que u est une isométrie directe du plan euclidien E, donc il s'agit d'une rotation d'après les résultats précédents. Finalement, on constate que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix},$$

donc u est la rotation du plan euclidien orienté E d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Exemple 7

Déterminons la nature de l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

En notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$, on remarque que la matrice M est orthogonale et que $\det(M) = -1$. On en déduit que u est une isométrie indirecte du plan euclidien E, donc il s'agit de la réflexion par rapport à $E_1(u)$ d'après les résultats précédents. De plus, on constate que

$$E_1(M) = \mathrm{Ker}(\mathrm{I}_2 - M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \;\middle|\; y = 2x \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

donc u est la réflexion par rapport à $E_1(u) = \mathrm{Vect}(i + 2j)$.

Remarque 9

L'étude de cette partie nous permet de définir rigoureusement la mesure d'un angle orienté de vecteurs dans un plan euclidien orienté. Si a et b sont deux vecteurs non nuls du plan euclidien orienté E, alors on peut vérifier qu'il existe une unique rotation $r_{a,b} \in \mathrm{SO}(E)$ telle que

$$r_{a,b}\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = \frac{b}{\|b\|}.$$

La mesure de l'angle orienté (a, b) est défini comme l'unique réel θ modulo 2π tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r_{a,b}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où $\mathscr{B}$ est une base orthonormée directe du plan orienté E.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (i, j)$. Étudier l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$(i)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (ii)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad (iii)\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad (iv)\ \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Soit E un plan euclidien.

1) Que peut-on dire de la composée de deux réflexions de E ?
2) Que peut-on dire de la composée d'une rotation et d'une réflexion de E ?
3) Montrer que toute rotation de E peut s'écrire comme la composée de deux réflexions de E.

Dans cette partie, on considère un espace euclidien E de dimension 3 que l'on suppose orienté par une base orthonormée $\mathscr{C} = (i, j, k)$.

Dans cette sous-partie, on considère un espace euclidien E de dimension 3 que l'on suppose orienté par une base orthonormée $\mathscr{C} = (i, j, k)$.

Soit $(u, v) \in E^2$. Comme l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi : w \mapsto [u, v, w]$ est une forme linéaire, on en déduit par le théorème de représentation des formes linéaires d'un espace euclidien qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que

$$\forall w \in E, \quad [u, v, w] = (a \mid w).$$

Définition (Produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de...)

Le produit vectoriel de deux vecteurs $u \in E$ et $v \in E$, noté $u \wedge v$, est l'unique vecteur de E tel que

$$\forall w \in E, \quad [u, v, w] = (u \wedge v \mid w).$$

Exemple 8

On a $i \wedge j = k$ et $i \wedge k = -j$.

Proposition 7

Le produit vectoriel vérifie les propriétés suivantes.

(i) Linéaire à gauche : pour tout $v \in E$, l'application $u \mapsto u \wedge v$ est linéaire.

(ii) Linéaire à droite : pour tout $u \in E$, l'application $v \mapsto u \wedge v$ est linéaire.

(iii) Antisymétrique : pour tout $(u, v) \in E^2$, on a $v \wedge u = -u \wedge v$.

Remarque 10

Les points (i) et (ii) signifient que le produit vectoriel est une application bilinéaire.

Proposition 8

Soit $(u, v) \in E^2$. On a les propriétés suivantes.

(i) Le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et orthogonal à v.

(ii) On a $u \wedge v = 0_E$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

(iii) Si (u, v) est une famille orthonormée de E, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E.

Proposition 9

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de l'espace euclidien E. Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ sont les coordonnées respectives de deux vecteurs $u \in E$ et $v \in E$ dans la base $\mathscr{B}$, alors les coordonnées de $u \wedge v$ dans la base $\mathscr{B}$ sont

$$\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right).$$

Exemple 9

On a $(i + j) \wedge (i + k) = i - j - k$.

Remarque 11

Dans un espace euclidien orienté E de dimension 3, orienter un plan P est équivalent à orienter la droite vectorielle $D = P^\perp$.

- Si P est orienté par une base orthonormée (e_1, e_2) de P, alors on obtient une orientation de D en considérant la base orthonormée $e_1 \wedge e_2$ de $D = P^\perp$.
- Si $D = P^\perp$ est orienté par une base orthonormée u, alors en choisissant un vecteur unitaire $v \in P$, on obtient une orientation de P en considérant la base orthonormée $(v, u \wedge v)$ de P.

Les descriptions ci-dessus permettent de passer bijectivement d'une orientation de P à une orientation de $D = P^\perp$.

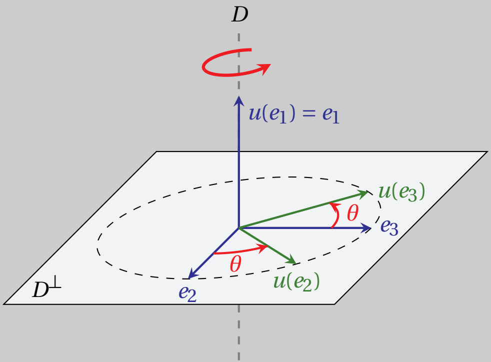
Théorème 7

Si $u \in \mathrm{SO}(E)$ est une isométrie directe d'un espace euclidien orienté E de dimension 3, alors il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Illustration

Interprétons géométriquement le résultat du théorème précédent. En notant $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base du théorème et en considérant la matrice, on a la figure suivante.



On dit que l'isométrie vectorielle u est la rotation vectorielle d'axe D dirigé par le vecteur e_1 et d'angle θ.

Bilan

Le tableau suivant résume la situation pour une isométrie $u \in \mathrm{SO}(E)$ où E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

Type	Nature	Valeurs propres réelles	Compléments
Directe	$u = \mathrm{Id}_E$	$\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$	$E_1(u) = E$
	u est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D (rotation d'angle $\theta = \pi\ [2\pi]$)	$\mathrm{Sp}(u) = \{1, -1\}$	$\begin{array}{rcl} E_1(u) & = & D \\ E_{-1}(u) & = & D^\perp \end{array}$
	u est la rotation d'axe D et d'angle $\theta \neq 0\ [\pi]$	$\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$	$E_1(u) = D$

On rappelle que E est un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée $\mathscr{C} = (i, j, k)$. On souhaite déterminer les caractéristiques géométriques d'un élément $u \in \mathrm{SO}(E) \setminus \{\mathrm{Id}_E\}$.

1) On détermine l'axe de la rotation $D = E_1(u)$ et on fixe un vecteur e_1 unitaire dans D.

2) On détermine l'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de la rotation. On commence par remarquer que l'on a

$$\mathrm{tr}(u) = 1 + 2\cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{tr}(u) - 1}{2}.$$

On en déduit θ modulo 2π en utilisant que le signe du nombre $\sin(\theta)$ est le même que celui du nombre

$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, x, u(x)) \quad \text{où} \quad x \in E \setminus D \quad \text{est choisi arbitrairement.}$$

Remarques 12

a) Si on souhaite déterminer la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dont le théorème assure l'existence, il suffit de considérer un vecteur e_2 orthogonal à e_1, puis de poser $e_3 = e_1 \wedge e_2$.

b) Justifions la formule ci-dessus donnant le signe de $\sin(\theta)$. Pour tout vecteur $x \in E \setminus D$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(b, c) \neq (0, 0)$ tel que

$$x = ae_1 + be_2 + ce_3$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = ae_1 + (b\cos(\theta) - c\sin(\theta))e_2 + (b\sin(\theta) + c\cos(\theta))e_3.$$

Remarques 12

b) Comme $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ est une matrice de passage entre deux bases orthonormées directes, on a $\det(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}) = 1$. On en déduit le résultat souhaité en remarquant que

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{C}}(e_1, x, f(x)) &= \det(P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}})\det_{\mathscr{B}}(e_1, x, f(x))\\ &= \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & b\cos(\theta) - c\sin(\theta) \\ 0 & c & b\sin(\theta) + c\cos(\theta) \end{vmatrix}\\ &= \underbrace{\left(b^2 + c^2\right)}_{>0}\sin(\theta).\end{aligned}$$

Exemple 10

Soit $u \in \mathrm{SO}(E)$ dont la matrice dans la base orthonormée directe $\mathscr{C} = (i, j, k)$ est

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}).$$

Nous allons déterminer la nature de cette isométrie.

1) On obtient par le calcul que $D = E_1(u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - u) = \mathrm{Vect}(i + j)$, donc on pose $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$.

Exemple 10

2) Si $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle de l'isométrie u, on a

$$\mathrm{tr}(u) = 1 + 2\cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{tr}(u) - 1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

De plus, on sait que le nombre $\sin(\theta)$ est de même signe que le nombre

$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, j, u(j)) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4} > 0,$$

donc on a $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

On conclut que u est la rotation d'axe D dirigé par $i + j$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (i, j, k)$. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est donnée ci-dessous est une rotation et déterminer leurs caractéristiques.

$$(i)\ \ A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ \ B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix},$$

$$(iii)\ \ C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cette partie, on considère un espace euclidien E et un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition (Endomorphisme autoadjoint)

Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit autoadjoint (ou symétrique) si

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \big(f(x) \mid y\big) = \big(x \mid f(y)\big).$$

Notation

On désigne par $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de l'espace euclidien E.

Exemple 11

L'application Id_E est un endomorphisme autoadjoint de E.

Remarque 13

L'ensemble $\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Théorème de caractérisation des endomorphismes autoadjoints

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est autoadjoint si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est symétrique.

Remarque 14

En notant $n = \dim(E)$, on déduit du théorème ci-dessus que l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{S}(E)$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, donc on a l'égalité

$$\dim\left(\mathscr{S}(E)\right) = \dim\left(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\right) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Proposition 10

Soit E un espace euclidien.

(i) Un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ est autoadjoint si et seulement si p est un projecteur orthogonal.

(ii) Une symétrie $s \in \mathscr{L}(E)$ est autoadjoint si et seulement si s est une symétrie orthogonale.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le produit scalaire $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que $f : P \mapsto \left(X^2 - 1\right)P'' + 2XP'$ est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.

Lemme 1

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien sont deux à deux orthogonaux.

Remarque 15

Par le théorème de caractérisation des endomorphismes autoadjoints vu dans la sous-partie précédente, on en déduit que les sous-espaces propres d'une matrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 12

Les sous-espaces propres de la matrice symétrique réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sont} \quad E_0(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

qui sont bien orthogonaux.

Théorème spectral

Tout endomorphisme autoadjoint $f \in \mathscr{S}(E)$ d'un espace euclidien E est diagonalisable dans une base orthonormée, i.e. il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale.

Théorème spectral (version matricielle)

Si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle, alors il existe une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1} = PDP^{\top}.$$

Remarque 16

On en déduit que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

ATTENTION

Si la matrice A est symétrique avec des coefficients non réels, alors elle n'est pas nécessairement diagonalisable. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$$

est symétrique, mais elle n'est pas diagonalisable.

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $MM^\top M = \mathrm{I}_n$.

1) Montrer que M est une matrice symétrique.
2) En déduire que $M = \mathrm{I}_n$.

On considère une matrice symétrique réelle $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on souhaite diagonaliser de sorte que la matrice de passage P soit orthogonal.

1) On détermine les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A.
2) On construit des bases orthonormées de chacun des sous-espaces propres (en utilisant, par exemple, l'algorithme de Gram-Schmidt).
3) La matrice P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs des bases orthonormées trouvées.

Exemple 13

Nous allons diagonaliser la matrice symétrique réelle ci-dessous avec une matrice de passage orthogonale.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R}).$$

Par un calcul direct, on obtient que le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda-3)^2$, donc on a $\mathrm{Sp}(A) = \{-3, 3\}$. Les sous-espaces propres de la matrice A sont

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Exemple 13

En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base de $E_3(A)$ ci-dessus, on en déduit qu'une base orthonormée du sous-espace propre $E_3(A)$ est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right).$$

En normalisant le vecteur dans la base de $E_{-3}(A)$ ci-dessus, on obtient une base orthonormée de $E_{-3}(A)$ avec le vecteur

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Exemple 13

On a donc $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

De plus, la matrice P est une matrice de passage entre deux bases orthonormées, donc on a $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et

$$P^{-1} = P^\top = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 12

Diagonaliser les matrices symétriques réelles suivantes avec une matrice de passage orthogonale.

$$(i)\ \ A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad (ii)\ \ B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix},\quad (iii)\ \ C=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

Définition (Endomorphisme autoadjoint positif / défini positif)

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E.

(i) On dit que f est positif si $\big(f(x) \mid x\big) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$.

(ii) On dit que f est défini positif si $\big(f(x) \mid x\big) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$.

Notation

On désigne par $\mathscr{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de l'espace euclidien E et par $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs de l'espace euclidien E.

Proposition 11

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E.

(i) L'endomorphisme f est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.

(ii) L'endomorphisme f est défini positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Définition (Matrice symétrique positive / définie positive)

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

(i) On dit que A est positive si et seulement si $X^\top AX \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(ii) On dit que A est définie positive si et seulement si $X^\top AX > 0$ pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{\mathrm{O}_{n,1}\}$.

Notation

On désigne par $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices positives de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices définies positives de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 17

En notant $n = \dim(E)$ et en considérant une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, alors un endomorphisme autoadjoint $f \in \mathscr{S}(E)$ est positif (respectivement défini positif) si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est positive (respectivement définie positive).

Exemple 14

On considère la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}).$$

La matrice A est positive, car on a

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top A X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \geqslant 0,$$

mais elle n'est pas définie positive, car on a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1-1)^2 = 0.$$

Proposition 12

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrie symétrique réelle.

(i) La matrice A est positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

(ii) La matrice A est définie positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Exemple 15

En reprenant l'exemple précédent, on a $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2\}$, donc on retrouve que la matrice A est positive, mais qu'elle n'est pas définie positive.

Exercice 13

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E.
Montrer que u est positif si et seulement si il existe $v \in \mathscr{S}(E)$ tel que $u = v^2$.