TD 13 Endomorphismes d'un espace euclidien

Partie I Matrices orthogonales et isométries vectorielles

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'application

$$\varphi : \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto (\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A)^{-1}.$$

1. Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_n + A) = \{\mathrm{O}_{n,1}\}$ et en déduire que l'application φ est bien définie.
2. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sur $\{M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \mathrm{Sp}(M)\}$.

Exercice 3 : Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} \right| \leqslant n \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}| \leqslant n^{3/2}.$$

Exercice 4 : Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ où E est un espace euclidien.
1. Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)^{\perp}$.
2. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{L}(E)$ définie par

$$p_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{Id} + u + \cdots + u^{n-1}\right)$$

converge vers la projection orthogonale de E sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 5 : Soient un espace euclidien E, un vecteur unitaire $u \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme $f_\alpha : E \to E$ défini par

$$\forall x \in E, \quad f_\alpha(x) = x + \alpha(x \mid u) \cdot u.$$

1. Déterminer les éléments propres de f_α.
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme f_α est-il une isométrie ?
3. Déterminer la nature géométrique de f_α dans ces cas.

Exercice 6 : Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Exercice 7 : On note $\mathscr{C} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{C}$ de la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé par le vecteur $i - 2j$ et d'angle $\pi/3$.

Exercice 8 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.
1. Si $u \in E$ est unitaire et $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que l'application $f : E \to E$ définie par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)(u \wedge x) + \big(1 - \cos(\theta)\big)(u \mid x)u.$$

est la rotation d'axe dirigé par u et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\mathscr{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation d'axe dirigé par $i + j + k$ et d'angle $\pi/3$.

Exercice 9 : Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (i, j, k)$. Déterminer les rotations u de E vérifiant

$$u(i) = -j \quad \text{et} \quad u(i - j + k) = i - j + k.$$

Partie II Endomorphismes autoadjoints

Exercice 10 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad u(M) = M + \mathrm{tr}(AM)A^\top.$$

Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\varphi : (M,N) \mapsto \mathrm{tr}(MN^\top)$.

Exercice 11 : Soient E un espace euclidien tel que $\dim(E) \geqslant 2$ et $(a,b) \in E^2$ tel que les vecteurs a et b ne sont pas colinéaires. On définit l'application $f : E \to E$ par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (b \mid x)a + (a \mid x)b.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E.
2. Déterminer les valeurs propres de f et leur ordre de multiplicité.

Exercice 12 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres comptées avec multiplicité d'une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors on a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Exercice 13 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente vérifiant $M^\top M = MM^\top$.

1. Montrer que $MM^\top$ est symétrique et nilpotente.
2. En déduire que $MM^\top$ est la matrice nulle.
3. Conclure que M est la matrice nulle.

Exercice 14 : Soit $(p,q) \in \mathcal{L}(E)^2$ un couple de projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme autoadjoint.
2. Montrer que $\big(\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q)\big)^\perp = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.
3. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 15 : Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de u de sorte que $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

1. Montrer pour tout $x \in E$ que
$$\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant (u(x) \mid x) \leqslant \lambda_n \|x\|^2.$$
2. Soit v un endomorphisme autoadjoint de E. Montrer que
$$\mathrm{Sp}(u+v) \subset \big[\min(\mathrm{Sp}(u)) + \min(\mathrm{Sp}(v)), \max(\mathrm{Sp}(u)) + \max(\mathrm{Sp}(v))\big].$$

Exercice 16 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M = A^\top A - AA^\top$.

1. Montrer que M est diagonalisable et calculer $\mathrm{tr}(M)$.
2. Montrer que les matrices A et $A^\top$ commutent si et seulement si $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 17 : Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire euclidien canonique. Montrer que si $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une fonction vectorielle vérifiant $X' = AX$, alors la fonction $\varphi : t \mapsto \|X(t)\|$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

$$(i)\ A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \quad (ii)\ \exists B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad A = B^2, \quad (iii)\ \exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A = MM^\top.$$

Exercice 19 : Soit $(A,B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$0 \leqslant \mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B).$$

Exercice 20 - Décomposition polaire : Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $A = MM^\top \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$.
3. En déduire qu'il existe un unique couple de matrices $(O,S) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.