TD 3 Compléments d'algèbre linéaire

Dans tous les exercices, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Révisions - Algèbre linéaire

I.A - Révisions - Espaces vectoriels

Exercice 1 : On considère $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + t = y + z + t = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F .

Exercice 2 : On considère $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus \text{Vect}(\exp)$.

Exercice 3 : On considère $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists T \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y - z)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f : P \mapsto P(0) + P(1)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.

Exercice 6 : Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. On définit

$$\varphi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}, \quad P \mapsto (P(a_0), P'(a_0), \dots, P(a_n), P'(a_n)).$$

Montrer que φ est bijective.

Exercice 7 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $I_p = \text{Im}(u^p)$ et $N_p = \text{Ker}(u^p)$.

1. Montrer que $(I_p)_{p \geq 0}$ est décroissante tandis que $(N_p)_{p \geq 0}$ est croissante.
2. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_{s+1} = I_s$ et $N_{s+1} = N_s$.
3. Soit r le plus petit des entiers s considérés ci-dessus. Montrer que pour tout entier $s \geq r$, on a $I_s = I_r$ et $N_s = N_r$.
4. Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires dans E .

Exercice 8 : Déterminer les éléments $a \in \mathbb{R}$ tels que la famille

$$\mathcal{F}_a = \left((1, -1, 0), (2, -1, 2), (1, 0, a) \right)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9 : Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2) \right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Décomposer le polynôme 1 dans cette base.

Exercice 10 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $P_k = X^k(1-X)^{n-k} \in \mathbb{R}[X]$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 11 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E . On désigne par $p \in \mathbb{N}^*$ l'unique entier tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
2. En déduire que si E est de dimension finie, alors $f^{\dim(E)} = 0$.

I.B - Révisions - Matrices

Exercice 12 : On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune des matrices ci-dessus.

- Déterminer le noyau, l'image et le rang de la matrice.
- La matrice est-elle inversible? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 13 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la puissance n -ième de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 14 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de la matrice suivante.

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Exercice 15 - Transformée de Fourier discrète : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. On définit la matrice $A = (a_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$\forall (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{k,\ell} = \omega^{(k-1)(\ell-1)}.$$

- Calculer la matrice $A\bar{A}$.
- En déduire que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1} .

Exercice 16 : On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si elle est à coefficients positifs et vérifie

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1.$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par produit.
- Déterminer les matrices $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A \in \mathcal{S}$ et $A^{-1} \in \mathcal{S}$.

Exercice 17 : Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.

- Montrer que $I_n + N$ est inversible.
- Montrer que si A et N commutent, alors $A + N$ est inversible.

I.C - Révisions - Matrices d'un endomorphisme

Exercice 18 : On considère l'application $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad u(P) = P + P'(X + 1).$$

- Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
- Déterminer la matrice M de u dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.
- Calculer $\text{Ker}(M - I_4)$. En déduire $\text{Ker}(u - \text{Id})$.
- Calculer $\text{Im}(M - I_4)$. En déduire $\text{Im}(u - \text{Id})$.

Exercice 19 : On considère l'application $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 20 : Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x, y) = (x - 2y, x + 4y).$$

- Déterminer la matrice de u dans la base canonique $\mathcal{C}$.
- Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = ((2, -1), (1, -1))$.
- En déduire la matrice de u^n dans la base canonique pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 21 : Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On pose $u = i + k$, $v = i + j$ et $w = i + j + k$.

- Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E .
- Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.
- Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme non nul tel que $f^3 + f = 0$.

- Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
- Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23 : Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}.$$

I.D - Révisions - Projecteurs et symétries

Exercice 24 : On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \text{Vect}((1, 0, 0)) \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

- Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
- Déterminer les projecteurs associés à cette somme directe.
- Déterminer la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Exercice 25 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Montrer que f est un projecteur et préciser ses caractéristiques.

Exercice 26 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Montrer que f est une symétrie et préciser ses caractéristiques.

Exercice 27 : Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\lambda \neq \mu$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$(f - \lambda \text{Id}_E) \circ (f - \mu \text{Id}_E) = 0.$$

- Montrer que $E = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \mu \text{Id}_E)$.
- Exprimer avec f les projecteurs associés à la somme directe précédente.

Exercice 28 : Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs qui commutent.

- Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E .
- Déterminer le noyau et l'image de $p \circ q$.

Partie II Déterminants

Exercice 29 : Pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, calculer sous forme factorisée le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 30 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$, calculer le déterminant de la matrice $(s_{\min(i,j)})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 31 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le déterminant de $(|i - j|)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 32 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer D_{n+2} en fonction de D_{n+1} et D_n .
2. En déduire une expression D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 33 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que si n est un entier impair, alors M n'est pas inversible.

Exercice 34 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'élément $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ pour que la famille

$$\mathcal{F} = ((X + z_0)^n, (X + z_1)^n, \dots, (X + z_n)^n)$$

soit une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie III Matrice par blocs

Exercice 35 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ une matrice par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que la matrice M est inversible si et seulement si A est inversible.
2. Dans le cas où M est inversible, exprimer M^{-1} en fonction de A .

Exercice 36 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ une matrice par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit inversible.
2. Dans le cas où M est inversible, exprimer M^{-1} en fonction de A .

Exercice 37 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ une matrice par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \text{ avec } (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2.$$

Montrer que $\det(M) \geq 0$.

Exercice 38 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ une matrice par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } (A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3 \times \text{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Montrer que si A et C commutent, alors on a $\det(M) = \det(AD - BC)$.

Partie IV Sommes directes et sous-espaces stables

Exercice 39 : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $u : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, y, x + z)$. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad D = \text{Vect}((1, 0, 1)).$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$, puis que H et D sont stables par u .
2. Écrire la matrice de u dans une base adaptée à $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.

Exercice 40 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les ensembles

$$F = \{P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \mid P(-X) = P(X)\} \quad \text{et} \quad G = \{P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \mid P(-X) = -P(X)\}.$$

On considère également $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$ défini par $u : P \mapsto X^{2n}P(X^{-1})$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels stables par u .
2. Montrer que $\mathbb{R}_{2n}[X] = F \oplus G$.
3. Écrire la matrice de u dans une base adaptée à $\mathbb{R}_{2n}[X] = F \oplus G$.

Exercice 41 : On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définis par

$$F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}, \quad G = \{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid g \text{ est linéaire}\}, \\ H = \{h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid h \text{ est constante}\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G \oplus H$.
2. Pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit $T(f) : x \mapsto f(x^2)$.
 - (a) Montrer que $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 - (b) Les sous-espaces vectoriels F , G et H sont-ils stables par T ?

Exercice 42 : Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto P'$.

Exercice 43 : Montrer qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E commute avec un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par f .

Partie V Trace d'une matrice ou d'un endomorphisme

Exercice 44 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB - BA = A$. Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{tr}(A^p) = 0$.

Exercice 45 : Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{tr}(MM^T) = 0$.

Exercice 46 : Montrer que l'ensemble $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$ est un hyperplan de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 47 : Soit E le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{F} = (\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$.

1. Déterminer la dimension de E .
2. Montrer que $\varphi : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E .
3. Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{F}$ de E .
4. Calculer le déterminant et la trace de φ . L'endomorphisme φ est-il bijectif?

Exercice 48 : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on considère l'application $f_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par $f_k : x \mapsto x^k e^{\alpha x}$. On note $E = \text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$ est une base de E .
2. Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E .
3. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
4. Montrer que φ est bijective si et seulement si $\alpha \neq 0$.

Exercice 49 : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une base $\mathcal{B}$ de E et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rang}(u) \leq 1$.

1. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tels que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = XY$.
2. En déduire que $u^2 = \text{tr}(u)u$.

Exercice 50 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On considère un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \text{Id}_E$. On note

$$p = \frac{1}{3}(\text{Id}_E + u + u^2).$$

1. Montrer que p est un projecteur sur $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$.
2. Montrer que

$$\dim(\text{Ker}(u - \text{Id}_E)) = \frac{1}{3}(\dim(E) + \text{tr}(u) + \text{tr}(u^2)).$$

Partie VI Polynômes annulateurs

Exercice 51 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Exprimer la matrice A^2 en fonction des matrices A et I_3 .
2. La matrice A est-elle inversible? Si oui, donner son inverse.
3. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 52 : Soit $k \in \mathbb{N}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que $P = (X + 1)(X - 1)^2$ est un polynôme annulateur de A .
2. La matrice A est-elle inversible? Si oui, donner son inverse.
3. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 53 : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & z & z^2 \\ z^{-1} & 0 & z \\ z^{-2} & z^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

1. Exprimer la matrice M^2 en fonction des matrices M et I_3 .
2. La matrice M est-elle inversible? Si oui, donner son inverse.
3. Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 54 : Soit $(n, a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^2$ avec $n \geq 2$. On considère la matrice

$$M = aU + bI_n \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Exprimer la matrice M^2 en fonction des matrices M et I_n .
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la matrice M soit inversible.

Exercice 55 : Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 < p < n$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & B \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}).$$

Montrer que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de M si et seulement si P est un polynôme annulateur de A et de B .

Exercice 56 : Soient $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie et $a \in E$. On définit l'endomorphisme $u : E \rightarrow E$ par

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \varphi(a)x - \varphi(x)a.$$

1. Exprimer φ^2 en fonction de φ et Id_E .
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un isomorphisme.