Mathématiques

PSI

Lycée Couffignal

CHAPITRE 3

Compléments d'algèbre linéaire

Plan du chapitre

Introduction

L'algèbre linéaire est née de l'étude des systèmes linéaires, dont la résolution est motivée par l'introduction de la géométrie analytique par Descartes dans son appendice *La Géométrie* en 1637. Les premiers résultats sont énoncés par Leibniz en 1693 et Maclaurin en 1748 pour les systèmes à deux ou trois inconnues, puis généralisés par Cramer en 1750 avec les formules qui portent aujourd'hui son nom. Ce n'est qu'en 1810 que Gauss présenta la méthode du pivot permettant de résoudre les systèmes linéaires sous forme de tableaux de nombres. Cependant, on en trouve des traces en Chine aux alentours du II^{e} siècle avant notre ère, sous le nom de *Fang cheng* ce qui se traduit littéralement par « la disposition rectangulaire ».

Les tableaux de nombres sont manipulés depuis deux siècles avant notre ère, mais le terme « matrice » est employé pour la première fois par Sylvester en 1850. Les opérations usuelles du calcul matriciel sont définies dans un traité de Cayley publié en 1854 portant sur les transformations géométriques. Cette approche abstraite des opérations sur les matrices est révolutionnaire car l'utilisation des matrices était essentiellement bornée au calcul des déterminants jusque-là.

Au cours du XVIII^{e} siècle, les mathématiciens cherchent à développer un formalisme permettant d'unifier les résultats sur des objets distincts présentant des propriétés communes. Grassmann publie son traité *La théorie de l'extension linéaire* en 1844 dans lequel il introduit la notion d'espace vectoriel de dimension finie afin de calculer des grandeurs géométriques en étant débarrassé des choix de coordonnées. Le fait que la dimension puisse être supérieure à trois fit apparaître quelques réticences de la part de ceux qui considèrent que tout objet mathématique doit avoir une interprétation dans le monde sensible, mais elles se dissipèrent avec le temps. Finalement, Peano donne en 1888 une définition axiomatisée des espaces vectoriels proche de celle que nous utilisons de nos jours.

L'algèbre linéaire est omniprésente dans les différentes disciplines scientifiques, notamment par l'utilisation des matrices et de leurs propriétés. De plus, la notion d'espace vectoriel a par exemple un rôle central en mécanique quantique et dans la théorie des codes utilisée dans les télécommunications.

L'objectif principal de ce chapitre est d'introduire quelques nouvelles notions que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$. Tous les espaces vectoriels dans ce chapitre sont considérés sur le corps $\mathbb{K}$.

Partie I Compléments sur les matrices

I.A - Déterminant de Vandermonde

Dans cette sous-partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition (Matrice de Vandermonde) : On appelle matrice de Vandermonde associée à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$M(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Remarques 1 :

a) Les coefficients de la matrice de Vandermonde $M(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont $m_{i,j} = \lambda_j^{i-1}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

b) La matrice $M(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top$ est également appelée matrice de Vandermonde.

Définition (Déterminant de Vandermonde) : On appelle déterminant de Vandermonde de $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ le déterminant $n\times n$ de la matrice de Vandermonde $M(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, i.e.

$$\mathrm{Vand}(\lambda_1,\dots,\lambda_\mathrm{n})=\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

Théorème (Expression du déterminant de Vandermonde) : Pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, on a

$$\mathrm{Vand}(\lambda_1,\dots,\lambda_\mathrm{n})=\prod_{1\leqslant \mathrm{i}<\mathrm{j}\leqslant \mathrm{n}}(\lambda_\mathrm{j}-\lambda_\mathrm{i}).$$

Corollaire (Inversibilité de la matrice de Vandermonde) : Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$. La matrice de Vandermonde associée à $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ est inversible si et seulement si les nombres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont deux à deux distincts.

Exercice 1 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant de la matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $m_{i,j}=i^j$ pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.

I.B - Matrices par blocs

Dans cette sous-partie, on considère des entiers $n,p,r,s\in\mathbb{N}^*$. Étant donné une matrice $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et des décompositions de $n=\sum_{i=1}^{r}n_i$ et de $p=\sum_{j=1}^{s}p_j$ avec $n_1,\dots,n_r\in\mathbb{N}^*$ et $p_1,\dots,p_s\in\mathbb{N}^*$, on peut en regroupant les coefficients de A l'écrire sous la forme d'une matrice par blocs, i.e.

$$A=\begin{pmatrix}A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,s}\\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{r,1} & A_{r,2} & \cdots & A_{r,s}\end{pmatrix}\quad\text{avec}\quad\forall (i,j)\in[\![1,r]\!]\times[\![1,s]\!],\quad A_{i,j}\in\mathscr{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{K}).$$

Exemple 1 : On peut écrire

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|ccc}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\mathrm{O}_{3,2} & \mathrm{I}_3\\ \mathrm{I}_2 & \mathrm{O}_{2,3}\end{pmatrix}.$$

Proposition (Opérations sur les matrices par blocs) : Soient $A=(A_{i,j})$ et $B=(B_{i,j})$ deux matrices par blocs à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

(i) Sous réserve de compatibilité des tailles des blocs, on a $A+\lambda B=(A_{i,j}+\lambda B_{i,j})$.

(ii) Sous réserve de compatibilité des tailles des blocs, on a $AB=(C_{i,j})$ avec $C_{i,j}=\sum_k A_{i,k}B_{k,j}$.

(iii) La transposée de A est $A^\top=\left(A_{j,i}^\top\right)$.

Remarques 2 :

a) Les deux premiers points indiquent que les opérations sur les matrices par blocs s'effectuent de la même manière que sur les matrices classiques du moment que les tailles des blocs sont compatibles.

b) On peut réécrire le troisième point sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,s} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r,1} & A_{r,2} & \cdots & A_{r,s} \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{\top} & A_{2,1}^{\top} & \cdots & A_{r,1}^{\top} \\ A_{1,2}^{\top} & A_{2,2}^{\top} & \cdots & A_{r,2}^{\top} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1,s}^{\top} & A_{2,s}^{\top} & \cdots & A_{r,s}^{\top} \end{pmatrix}.$$

c) En reprenant les notations ci-dessus pour des matrices de taille 2×2 par blocs, sous réserve de compatibilité des tailles des blocs, on a

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} + \lambda B_{1,1} & A_{1,2} + \lambda B_{1,2} \\ A_{2,1} + \lambda B_{2,1} & A_{2,2} + \lambda B_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{pmatrix}.$$

d) En reprenant les notations ci-dessus pour des matrices de taille 2×2 par blocs, on a

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{\top} & A_{2,1}^{\top} \\ A_{1,2}^{\top} & A_{2,2}^{\top} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2 : Si $A = \begin{pmatrix} \mathrm{O}_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & \mathrm{O}_n \end{pmatrix}$, alors $A^2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_n & \mathrm{O}_n \\ \mathrm{O}_n & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix} = -\mathrm{I}_{2n}$.

Exercice 2 : On considère une matrice par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathrm{O} & C \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que M est inversible si et seulement si A et C le sont.
2. Dans le cas où M est inversible, exprimer M^{-1} en fonction de A, B et C.

Définition (Matrice triangulaire par blocs) : En reprenant les notations au début de cette sous-partie, on dit que la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure par blocs si on a $r = s$ et si elle s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,r} \\ \mathrm{O} & A_{2,2} & & A_{2,r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} & A_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Remarque 3 : Si A est une matrice carrée triangulaire supérieure par blocs et si ses blocs diagonaux sont des matrices carrées, alors en utilisant la proposition précédente, on peut montrer par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \begin{pmatrix} A_{1,1}^k & (*) & \cdots & (*) \\ \mathrm{O} & A_{2,2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} & A_{r,r}^k \end{pmatrix}.$$

Définition (Matrice diagonale par blocs) : En reprenant les notations au début de cette sous-partie, on dit que la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est diagonale par blocs si on a $r = s$ et si elle s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Remarque 4 : Si A est une matrice carrée diagonale par blocs et si ses blocs diagonaux sont des matrices carrées, alors en utilisant la proposition précédente, on peut montrer par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \begin{pmatrix} A_{1,1}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2,2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{r,r}^k \end{pmatrix}.$$

Proposition (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs) : Si $A = (A_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée triangulaire (supérieure) par blocs et si ses blocs diagonaux sont des matrices carrées, alors on a

$$\det\left(\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,r} \\ 0 & A_{2,2} & & A_{2,r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{r,r} \end{pmatrix}\right) = \prod_{k=1}^{r} \det(A_{k,k}).$$

Remarque 5 : Avec les notations ci-dessus, on en déduit qu'une matrice triangulaire par blocs $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si les matrices $A_{1,1}, \dots, A_{r,r}$ sont inversibles.

Exercice 3 : On considère une matrice par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2.$$

Montrer que $\det(M) = \det(A + B)\det(A - B)$.

Partie II Compléments sur les espaces vectoriels

Dans cette partie, on considère un entier $m \in \mathbb{N}^*$.

II.A - Produit d'espaces vectoriels

Dans cette sous-partie, on considère des espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_m$ sur le corps $\mathbb{K}$. On peut naturellement définir sur l'ensemble produit $E = E_1 \times \cdots \times E_m$ une loi $+ : E \times E \to E$ composante par composante, i.e.

$$\forall \big((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)\big) \in E^2, \quad (x_1, \ldots, x_m) + (y_1, \ldots, y_m) = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m).$$

De même, on peut naturellement définir sur l'ensemble produit $E = E_1 \times \cdots \times E_m$ une loi $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ par

$$\forall \big(\lambda, (x_1, \ldots, x_m)\big) \in \mathbb{K} \times E, \quad \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_m) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m).$$

Proposition 1 : Le produit $E = E_1 \times \cdots \times E_m$ muni des lois définies ci-dessus est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exemples 3 :

a) On retrouve que $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ est naturellement un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

b) L'ensemble $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}$ dispose d'une structure naturelle d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

Proposition 2 : Si $E_1, \ldots, E_m$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors l'espace vectoriel $E_1 \times \cdots \times E_m$ est de dimension finie et on a

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_m) = \sum_{k=1}^{m} \dim(E_k).$$

Remarque 6 : Si $(u_1, \ldots u_p)$ est une base de E_1 et que $(v_1, \ldots, v_q)$ est une base de E_2, alors une base de $E_1 \times E_2$ est

$$\big((u_1, 0_{E_2}), \ldots, (u_p, 0_{E_2}), (0_{E_1}, v_1), \ldots, (0_{E_1}, v_q)\big).$$

II.B - Somme de sous-espaces vectoriels

Définition (Somme de sous-espaces vectoriels) : La somme de sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_m$ d'un espace vectoriel E, noté $F_1 + \cdots + F_m$, est le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F_1 + \cdots + F_m = \big\{v_1 + \cdots + v_m \in E \mid \forall i \in [\![1, m]\!], \;\; v_i \in F_i\big\}.$$

Définition (Somme directe de sous-espaces vectoriels) : La somme de sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_m$ d'un espace vectoriel E est dite directe si tout vecteur de $F_1 + \cdots + F_m$ se décompose de manière unique comme une somme de vecteurs des sous-espaces vectoriels F_i, i.e.

$$\forall v \in F_1 + \cdots + F_m, \quad \exists! (v_1, \ldots, v_m) \in F_1 \times \cdots \times F_m, \quad v = v_1 + \cdots + v_m.$$

Dans ce cas, la somme de $F_1, \ldots, F_m$ est notée $F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$.

Exemple 4 : Trois droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$ sont en somme directe si et seulement si elles ne sont pas coplanaires.

Théorème (Caractérisation de la somme directe) : La somme de sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_m$ d'un espace vectoriel E est directe si et seulement si le vecteur nul se décompose de manière unique comme une somme de vecteurs des sous-espaces vectoriels F_i, i.e.

$$\forall (v_1, \dots, v_m) \in F_1 \times \cdots \times F_m, \quad v_1 + \cdots + v_m = 0_E \quad \Rightarrow \quad v_1 = \cdots = v_m = 0_E.$$

Exercice 4 : On note $F = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 0 \right\}$ et on désigne par G le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Montrer que la somme $F + G$ est directe.

Proposition 3 : Soient $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m$ des bases respectives de sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_m$ d'un espace vectoriel E de dimension finie. On a l'égalité $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$ si et seulement si la famille $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m)$ est une base de E.

Remarques 7 :

a) Dans tous les cas, la famille $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de la somme $F_1 + \cdots + F_m$.

b) On en déduit que si la somme des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_m$ est directe, alors on a

$$\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_m) = \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_m).$$

Définition (Base adaptée à une décomposition en somme directe) : Avec les notations de la proposition précédente, on dit que $\mathscr{B}$ est une base de E adaptée à la décomposition en somme directe $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$.

Corollaire 1 : Si $F_1, \dots, F_m$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E, alors

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{m} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i).$$

De plus, la somme $F_1 + \cdots + F_m$ est directe si et seulement si l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Exercice 5 : On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivant

$$F = \mathrm{Vect}\big((1,0,0,1)\big), \qquad H_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z,\ \ y = t\},$$
$$G = \mathrm{Vect}\big((1,1,1,1)\big), \qquad H_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = -x,\ \ z = -y\}.$$

Étudier si $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \oplus H_1$ et si $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \oplus H_2$.

II.C - Sous-espaces stables d'un endomorphisme

Définition (Sous-espace vectoriel stable) : Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est dit stable par un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ si $f(F) \subset F$, i.e.

$$\forall v \in F, \quad f(v) \in F.$$

Exemples 5 :

a) Les sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E sont stables par tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$.

b) Pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par f.

c) Les sous-espaces vectoriels stables d'une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\pi/2$ sont $\{(0,0)\}$ et $\mathbb{R}^2$.

d) Les sous-espaces vectoriels stables d'une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\pi/2$ sont $\{(0,0,0)\}$, l'axe de la rotation D, le plan vectoriel orthogonal à D et $\mathbb{R}^3$.

e) On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$f : P \mapsto (X^2+1)P'' + XP' + (X+1)P(1).$$

Le sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}_1[X]$ est stable par f, car pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_1[X]$, on a

$$\deg(f(P)) = \deg\big((X^2+1)P'' + XP' + (X+1)P(1)\big) \leqslant \max\big(\deg((X^2+1)P''), \deg(XP'), \deg((X+1)P(1))\big) \leqslant 1.$$

f) On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (7x+4y+4z, 4x-8y+z, -4x-y+8z).$$

Les sous-espaces vectoriels $D = \mathrm{Vect}\big((1,-4,0)\big)$ et $H = \mathrm{Vect}\big((0,0,1),(4,1,0)\big)$ sont stables par f. En effet, on a

$$f(D) = \mathrm{Vect}\big(f(1,-4,0)\big) = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(-9,36,0)}_{\in D}\big) \subset D,$$
$$f(H) = \mathrm{Vect}\big(f(0,0,1), f(4,1,0)\big) = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(4,1,8)}_{\in H}, \underbrace{(32,8,-17)}_{\in H}\big) \subset H.$$

Remarque 8 : Si F est un sous-espace stable par $f \in \mathscr{L}(E)$, alors la restriction de f au sous-espace vectoriel F, noté $f_{|F}$, est un endomorphisme de F. On appelle $f_{|F}$ l'endomorphisme induit par f sur F.

Proposition 4 : Soit $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ où E est un espace vectoriel. Si f et g commutent, alors les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

La notion de stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme s'interprète matriciellement.

Proposition 5 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E de dimension finie. On considère une base adaptée $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ à la décomposition $E = F \oplus G$.
Le sous-espace vectoriel F est stable par un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ si et seulement si la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure par blocs, i.e. de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \mathrm{O} & A_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A_{1,1} \in \mathscr{M}_{\dim(F)}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad A_{2,2} \in \mathscr{M}_{\dim(G)}(\mathbb{K}).$$

Dans ce cas, on a $A_{1,1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f_{|F})$.

Exemple 6 : On reprend les notations du e) de l'exemple 5. En notant $G = \mathrm{Vect}(X^2)$ et en considérant la base adaptée $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ à la décomposition $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$, la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Proposition 6 : Soient $F_1, \ldots, F_m$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$. On considère une base adaptée $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$ à la décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$.
Les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_m$ sont stables par un endomorphisme f si et seulement si la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs, i.e. de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} & A_m \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1, m]\!], \quad A_i \in \mathscr{M}_{\dim(F_i)}(\mathbb{K}).$$

Dans ce cas, on a $A_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_i}(f_{|F_i})$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$.

Exemple 7 : On reprend les notations du f) de l'exemple 5. En considérant la base adaptée

$$\mathscr{B} = \big(\underbrace{(1,-4,0)}_{\text{Base de } D}, \underbrace{(0,0,1),(4,1,0)}_{\text{Base de H}}\big)$$

à la décomposition $\mathbb{R}^3 = D \oplus H$, la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} -9 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 8 & -17 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Remarques 9 :

a) Pour tout projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ d'un espace vectoriel E de dimension finie, si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, alors on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad r = \dim(F) = \mathrm{rang}(p).$$

b) Pour toute symétrie $s \in \mathscr{L}(E)$ d'un espace vectoriel E de dimension finie, si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & -\mathrm{I}_\ell \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad k = \dim\big(\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)\big) \quad \text{et} \quad \ell = \dim\big(\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)\big).$$

Exercice 6 : On considère l'application φ défini sur $\mathbb{R}_4[X]$ par $\varphi : P \mapsto X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Montrer que $F = \mathrm{Vect}\big(1, X^4\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big(X, X^2, X^3\big)$ sont stables par φ.
3. Déterminer la matrice de φ dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}_4[X] = F \oplus G$.

Partie III Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

Dans cette partie, on considère un couple d'entiers $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Définition (Trace d'une matrice carrée) : La trace d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notée $\mathrm{tr}(A)$, est la somme de ses coefficients diagonaux, i.e.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}.$$

Proposition 7 : La trace vérifie les propriétés suivantes.

(i) L'application $\mathrm{tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une application linéaire.

(ii) Pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Rappelons que deux matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$.

Corollaire 2 : Si deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors elles ont la même trace.

Exercice 7 : Déterminer les couples $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ tels que $AB - BA = \mathrm{I}_n$.

Définition (Trace d'un endomorphisme) : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. La trace de f, notée $\mathrm{tr}(f)$, est la trace de la matrice représentant f dans une base $\mathscr{B}$ de E.

Remarque 10 : D'après le lemme précédent, le nombre $\mathrm{tr}(f)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ que l'on utilise pour faire le calcul. En effet, si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, on a avec la formule du changement de base

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times (P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}})^{-1},$$

donc les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ sont semblables, donc elles ont la même trace.

Exemples 8 :

a) On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = XP''(X) + P(X)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, la matrice de f est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par définition, on obtient que la trace de f est $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 1+1+1 = 3$.

b) D'après la remarque 9a, pour tout projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ d'un espace vectoriel E de dimension finie, on a la relation $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rang}(p)$.

Proposition 8 : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

(i) L'application $\mathrm{tr} : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{K}$ est une application linéaire.

(ii) Pour tout $(u,v) \in \mathscr{L}(E,F) \times \mathscr{L}(F,E)$, on a $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.

Exercice 8 : Calculer la trace de l'endomorphisme $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f : P \mapsto P'$.

Partie IV Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

IV.A - Polynômes d'endomorphismes

On rappelle que si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et si $k \in \mathbb{N}$, on définit l'endomorphisme f^k par

$$f^0 = \mathrm{Id}_E\,, \qquad f^1 = f\,, \qquad f^2 = f \circ f\,, \qquad f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}\,.$$

Dans cette sous-partie, nous allons généraliser cette définition.

Définition (Polynôme d'un endomorphisme) : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme, on définit l'endomorphisme $P(f) \in \mathscr{L}(E)$ par $P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k$.

Exemple 9 : Avec les notations ci-dessus, si $P = X^3 - 4X^2 + 1$, alors $P(f) = f^3 - 4f^2 + \mathrm{Id}_E$.

Remarque 11 : Avec les notations de la définition précédente, on a pour tout vecteur $v \in E$ que

$$[P(f)](v) = \left[\sum_{k=0}^{d} a_k f^k\right](v) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k(v).$$

En pratique, on notera plus simplement $[P(f)](v) = P(f)(v)$.

ATTENTION : Il faut prendre garde à l'emplacement des parenthèses : la notation $P\big(f(v)\big)$ ne veut rien dire !

Proposition 9 : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on a $(\lambda P + \mu Q)(f) = \lambda P(f) + \mu Q(f)$.
(ii) Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on a $P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f) = (QP)(f) = Q(f) \circ P(f)$.

Remarque 12 : On en déduit que f et $P(f)$ commutent, donc $\mathrm{Ker}(P(f))$ est un sous-espace stable par f d'après une propriété vue précédemment.

Définition (Polynôme annulateur) : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Remarque 13 : Tout endomorphisme est annulé par le polynôme nul.

Exercice 9 : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. En considérant la famille $\mathscr{F} = (\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n^2})$, montrer que f admet un polynôme annulateur non nul.

IV.B - Polynômes de matrices carrées

Dans cette sous-partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition (Polynôme d'une matrice carrée) : Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme, on définit la matrice $P(M) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k$.

Exemple 10 : Avec les notations ci-dessus, si $P = X^3 - 4X^2 + 1$, alors $P(M) = M^3 - 4M^2 + \mathrm{I}_n$.

Remarque 14 : Cette définition est naturellement liée à celle de la sous-partie précédente sur les polynômes d'endomorphismes : si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie et si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme, alors pour toute base $\mathscr{B}$ de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P(f)) = P(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))$.

Proposition 10 : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on a $(\lambda P + \mu Q)(M) = \lambda P(M) + \mu Q(M)$.

(ii) Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on a $P(M)Q(M) = (PQ)(M) = (QP)(M) = Q(M)P(M)$.

Définition (Polynôme annulateur) : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de M si $P(M) = \mathrm{O}_n$.

Remarques 15 :

a) Toute matrice carrée est annulée par le polynôme nul.

b) Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est annulateur de f si et seulement P est un polynôme annulateur de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Exercice 10 : Montrer que $P(X) = X^2 - 2X - 3 \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

IV.C - Méthode - Polynôme annulateur et inverse

Dans cette sous-partie, on considère un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ d'un espace vectoriel E. On suppose que f admet un polynôme annulateur $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ tel que $a_0 = P(0) \neq 0$. Dans ce cas, en isolant Id_E, on a

$$P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \Leftrightarrow \quad f \circ \left(\sum_{k=1}^{d} a_k f^{k-1} \right) + a_0 \mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \Leftrightarrow \quad f \circ \underbrace{\left(-\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{d} a_k f^{k-1} \right)}_{g} = \mathrm{Id}_E.$$

De plus, comme g est un polynôme en f, alors f et g commutent, donc on a $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_E$. On conclut que f est un isomorphisme et que $f^{-1} = g$.

Remarque 16 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De la même manière, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est annulé par un polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ tel que $a_0 = P(0) \neq 0$, alors A est inversible et on peut exprimer A^{-1} comme un polynôme en A.

Exemple 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $A^3 - A^2 + A - 2\mathrm{I}_n = \mathrm{O}_n$, alors en isolant I_n, on obtient que

$$A\left[\frac{1}{2}\left(A^2 - A + \mathrm{I}_n\right)\right] = \left[\frac{1}{2}\left(A^2 - A + \mathrm{I}_n\right)\right] A = \mathrm{I}_n.$$

On en déduit que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - A + \mathrm{I}_n\right)$.

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi : M \mapsto M + \mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Exprimer φ^2 en fonction de φ et de $\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
3. En déduire que φ est un isomorphisme et donner φ^{-1}.

IV.D - Méthode - Polynôme annulateur et puissances

Dans cette sous-partie, on considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que A admet un polynôme annulateur non nul $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré d. On souhaite calculer les puissances de la matrice A.

Soit $k \in \mathbb{N}$. En effectuant la division euclidienne de X^k par P dans $\mathbb{K}[X]$, on a

$$\exists!(Q_k, R_k) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{d-1}[X], \quad X^k = PQ_k + R_k.$$

Comme $P(A) = \mathrm{O}_n$, on en déduit en évaluant l'expression précédente en A, que $A^k = R_k(A)$. Pour conclure, il suffit de calculer les coefficients du polynôme $R_k = \sum_{\ell=0}^{d-1} r_{k,\ell} X^\ell$.

En notant $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ les racines distinctes du polynôme P et $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}^*$ leur multiplicité respective, on remarque en dérivant et en évaluant aux racines de P la relation $X^k = PQ_k + R_k$ que

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \quad \forall j \in [\![0, m_i - 1]\!], \quad \frac{k!}{(k-j)!} z_i^{k-j} = \left(X^k\right)^{(j)}(z_i) = (PQ_k)^{(j)}(z_i) + R_k^{(j)}(z_i) = R_k^{(j)}(z_i).$$

Le système ci-dessus est linéaire en $r_{k,0}, \ldots, r_{k,d-1}$ et on peut montrer qu'il admet une unique solution.

Remarque 17 : La méthode ci-dessus s'adapte également pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ d'un espace vectoriel E admettant un polynôme annulateur non nul $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exemple 12 : On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant comme polynôme annulateur $P = (X-1)^2(X-2)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, en effectuant la division euclidienne de X^k par P dans $\mathbb{R}[X]$, on obtient que

$$\exists!(Q_k, R_k) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X], \quad X^k = PQ_k + R_k.$$

En écrivant $R_k = \alpha_k X^2 + \beta_k X + \gamma_k$ et en évaluant l'expression ci-dessus en 1 et en 2, on obtient les équations

$$1 = 1^k = R_k(1) = \alpha_k + \beta_k + \gamma_k \quad \text{et} \quad 2^k = R_k(2) = 4\alpha_k + 2\beta_k + \gamma_k.$$

De plus, en dérivant la relation $X^k = PQ_k + R_k$ et en l'évaluant en 1, on obtient l'équation

$$k = k1^{k-1} = R_k'(1) = 2\alpha_k + \beta_k.$$

En résolvant le système composé des trois équations ci-dessus, on obtient $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$, puis on conclut que

$$A^k = R_k(A) = \underbrace{\left(2^k - k - 1\right)}_{\alpha_k} A^2 + \underbrace{\left(2 + 3k - 2^{k+1}\right)}_{\beta_k} A + \underbrace{\left(2^k - 2k\right)}_{\gamma_k} \mathrm{I}_n.$$

Exercice 12 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

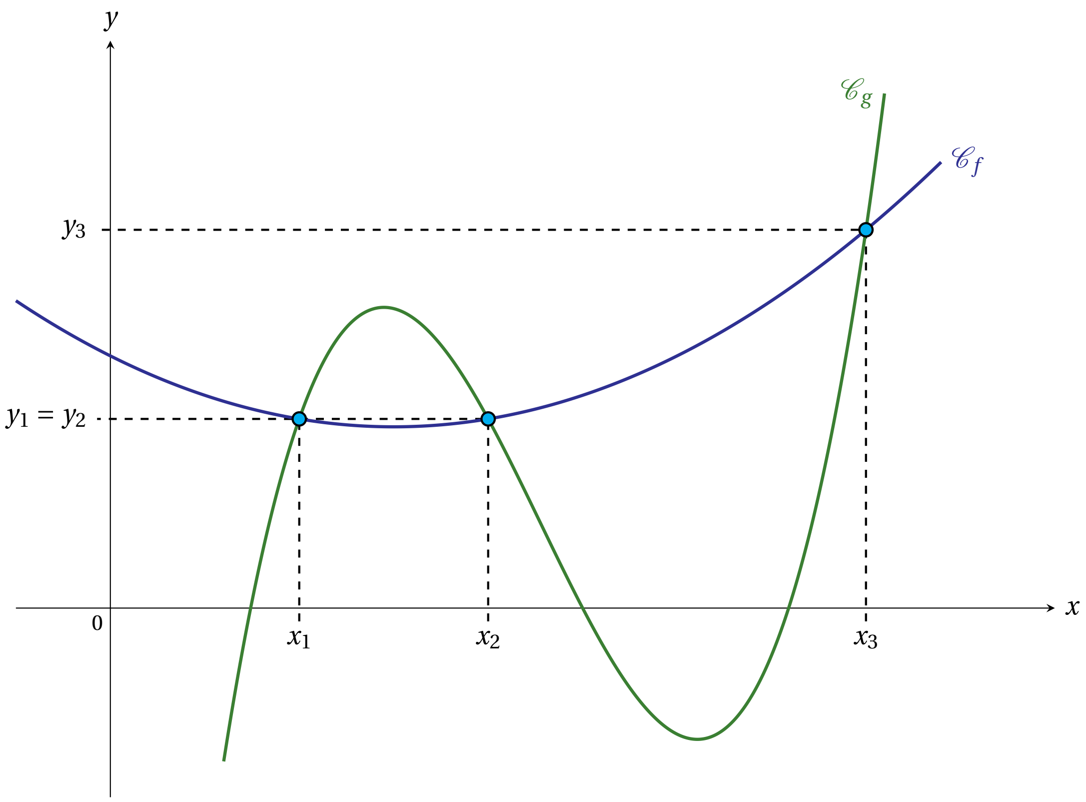
1. Montrer que $P(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de A.
2. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Partie V Interpolation polynomiale

Dans cette sous-partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$, des éléments deux à deux distincts $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. et des éléments $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$. On s'intéresse au problème de l'interpolation polynomiale : on souhaite déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Illustration : Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut reformuler le problème de l'interpolation polynomiale géométriquement : on souhaite déterminer l'ensemble des courbes représentatives des fonctions polynomiales passant par tous les points du plan $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$. Par hypothèse, ces points ont des abscisses deux à deux distinctes.

Sur le graphique ci-dessous, on a placé trois points d'abscisses distinctes et tracé les courbes représentatives de deux fonctions polynomiales f et g passant par ces trois points.



V.A - Résolution par un système linéaire

En écrivant le polynôme P sous la forme $P = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$, les équations précédentes se réécrivent

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=0}^{d} a_j x_i^j = y_i.$$

Ce système d'équations linéaires se réécrit sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1^1 & \cdots & x_1^d \\ 1 & x_2^1 & \cdots & x_2^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \cdots & x_n^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

En choisissant de se restreindre aux polynômes $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, i.e. en prenant $d = n-1$, on remarque que la matrice du système est une matrice de Vandermonde inversible car $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts. On en déduit le théorème suivant.

Théorème 1 : Il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $L(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Exemple 13 : Déterminons l'unique polynôme $L \in \mathbb{C}_2[X]$ vérifiant les équations $L(0) = -1$, $L(1) = 2$ et $L(2) = 3$. En écrivant $L = aX^2 + bX + c$, les équations précédentes sont équivalentes aux systèmes linéaires

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c & = & -1 \\ a+b+c & = & 2 \\ 4a+2c+c & = & 3. \end{array} \right.$$

Ce système admet comme unique solution $(a,b,c) = (-1,4,-1)$, donc $L = -X^2 + 4X - 1$.

Remarque 18 : En remarquant que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a l'équivalence

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad P(x_i) = y_i \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad (P-L)(x_i) = 0,$$

on en déduit que l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ sont exactement les polynômes de la forme

$$P = L + Q \prod_{k=1}^{n} (X - x_k) \quad \text{avec} \quad Q \in \mathbb{K}[X].$$

Exercice 13 : Déterminer le polynôme $L \in \mathbb{C}_2[X]$ vérifiant $L(-1) = 3$, $L(1) = 1$ et $L(2) = 3$.

V.B - Résolution par l'interpolation de Lagrange

Dans cette sous-partie, nous allons voir une autre approche pour résoudre ce problème.

Définition (Polynômes interpolateurs de Lagrange) : Les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux éléments $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ sont les polynômes $L_1, \dots, L_n \in \mathbb{K}[X]$ définis par

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad L_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}.$$

Remarque 19 : Les polynômes $L_1, \dots, L_n$ sont de degré $n-1$ et ils sont caractérisés par les relations

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Exemple 14 : Les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2)$ sont

$$L_1 = \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + 1, \quad L_2 = \frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)} = -X^2 + 2X, \quad L_3 = \frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X.$$

Proposition 11 : Soient $L_1, \dots, L_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux éléments $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$.

(i) La famille $\mathscr{B} = (L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

(ii) Pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$ sont $(P(x_1), \dots, P(x_n))$, i.e. on a $P = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) L_k$.

(iii) L'unique polynôme $L \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $L(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ est $L = \sum_{k=1}^{n} y_k L_k$.

Remarque 20 : En particulier, en considérant $P = 1 \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on obtient que $1 = \sum_{k=1}^{n} L_k$.

Exemple 15 : En appliquant la proposition avec les données de l'exemple précédent, on en déduit que l'unique polynôme $L \in \mathbb{C}_2[X]$ vérifiant les équations $L(0) = -1$, $L(1) = 2$ et $L(2) = 3$ est

$$L = (-1)L_1 + 2L_2 + 3L_3 = -X^2 + 4X - 1.$$

Exercice 14 : On considère les nombres réels $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 2$.

1. Calculer les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à x_1, x_2, x_3.
2. En déduire le polynôme $L \in \mathbb{C}_2[X]$ vérifiant $L(-1) = 3$, $L(1) = 1$ et $L(2) = 3$.