

Les polynômes de Laguerre

Introduction

L'objectif de ce problème est d'étudier la suite des polynômes de Laguerre que nous construirons dans la seconde partie. Nous étudierons ensuite quelques-unes de leurs propriétés.

I. Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

1. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Montrer que l'intégrale définissant $\varphi(P, Q)$ est convergente.
2. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

Dans tout le reste du problème, on note $(P | Q) = \varphi(P, Q)$ le produit scalaire de deux polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

II. Construction des polynômes de Laguerre

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\alpha : P \mapsto XP'' + (1 - X)P'$.

1. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
3. En déduire que α est diagonalisable et que $\text{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.
4. On fixe un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
 - a) Quelle est la dimension de $\text{Ker}(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
 - b) En déduire qu'il existe un unique polynôme $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(L_k) = -kL_k$.
 - c) Justifier que L_k est de degré k .
 - d) Déterminer L_0 et L_1 . Vérifier que $L_2 = X^2 - 4X + 2$.

III. Orthogonalité des polynômes de Laguerre

Les éléments $L_0, \dots, L_n$ construits dans la partie précédente sont appelés les polynômes de Laguerre.

1. On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.
 - a) Montrer que $(\alpha(P) | Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt$.
 - b) En déduire que $(\alpha(P) | Q) = (P | \alpha(Q))$.
2. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que $(P | L_n) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

IV. Racines des polynômes de Laguerre

Dans cette partie, on démontre que le polynôme L_n admet n racines réelles distinctes.

On note $x_1, \dots, x_r$ les racines réelles de L_n dont l'ordre de multiplicité est impair. On raisonne par l'absurde en supposant que L_n n'admet pas n racines réelles distinctes, ce qui implique que $r < n$. En décomposant L_n dans $\mathbb{R}[X]$, on en déduit qu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s) \in \mathbb{R}^{2s}$ tels que

$$L_n(X) = D(X) \prod_{\ell=1}^s ((X - \alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2) \quad \text{avec} \quad D(X) = \prod_{k=1}^r (X - x_k).$$

1. Montrer que la fonction $t \mapsto D(t)L_n(t)$ est positive sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(D \mid L_n) = 0$.
3. Conclure.

V. Méthode de quadrature de Gauss-Laguerre

D'après la partie précédente, les racines $x_1, \dots, x_n$ du polynôme L_n sont réelles et deux à deux distinctes.

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit l'application linéaire $\varphi_k : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi_k : P \mapsto P(x_k)$.
 - a) Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.
 - b) Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.
 - c) En déduire qu'il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k P(x_k).$$

2. Nous allons établir que la formule précédente reste valable pour tout polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On fixe un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.
 - a) Montrer qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P = L_n Q + R$.
 - b) En utilisant la question III.3, montrer que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} R(t)e^{-t} dt.$$

- c) Conclure que l'on a la relation

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k P(x_k).$$

3. Exhiber un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \neq \sum_{k=1}^n \lambda_k P(x_k).$$

Fin