

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Introduction

Dans ce problème, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n + 1$, le pion a une chance sur deux de se trouver en $x + 1$ et une chance sur deux de se trouver en $x - 1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

L'objectif de ce problème est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

- (i) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = 0$;
- (ii) sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'évènement $(T = 0)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide. Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

I. Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Que représente la variable aléatoire S_n ?
2. Calculer p_0 , p_1 et p_2 .
3. Justifier que si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
5. Montrer que les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes.
6. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n .
7. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Dédurre de la question précédente que

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

II. Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

1. Montrer que $R_p \geq 1$.
2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{1}{2} - k \right).$$

3. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1 - x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

III. Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

1. Calculer q_1 et q_2 .
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} q_n$ converge. En déduire que $R_q \geq 1$.
3. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ vérifiant $k \leq n$.
 - a) Justifier que les variables aléatoires $S_n - S_k$ et S_{n-k} ont la même loi.
 - b) Montrer que l'on a l'égalité

$$P((S_n = 0) \cap (T = k)) = P(S_{n-k} = 0)P(T = k).$$

4. En utilisant la formule des probabilités totales, déduire de la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^n p_{n-k} q_k.$$

5. a) En utilisant un produit de Cauchy, déduire de la question précédente que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

- b) En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$ en précisant son rayon de convergence.
 - c) En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - d) Justifier que la fonction g est continue sur $] - 1, 1[$, puis en déduire la valeur de $P(T = 0)$. Interpréter le résultat.
6. La variable aléatoire T est-elle d'espérance finie?

Fin