Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2

Introduction

Dans ce problème, nous allons résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \quad (E)$$

I. Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \quad (H)$$

associée à (E). On considère une suite de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.
- Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que

$$\forall x \in]-r, r[, \quad x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

- Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $] -r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire que si f est solution de (H) sur $] -r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

- Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}$$

est une solution de (H) sur $] -1, 1[$ développable en série entière.

II. Solutions de (E) sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

On désigne par I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)y(x).$$

1. Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I , puis exprimer z' et z'' avec y , y' et y'' .
2. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle

$$xz'' + z' = 2x. \quad (E_1)$$

3. Montrer que z est solution de (E_1) sur I si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I .
5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$.

Fin