Marche aléatoire sur un triangle

Introduction

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

(i) le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n, plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;

(ii) pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement « le pion se trouve en A à l'étape n », B_n l'évènement « le pion se trouve en B à l'étape n » et C_n l'évènement « le pion se trouve en C à l'étape n ». On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(A_n), \quad q_n = P(B_n), \quad r_n = P(C_n) \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

et on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

I. Préliminaires

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 4\}$ et déterminer les sous-espaces propres de la matrice M.

2. Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que l'on ait la relation $M = PDP^{-1}$. Expliciter les matrices P et D.

3. En déduire, que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

II. Calcul des probabilités

1. Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n = 0$ et $n = 1$.

2. Montrer avec la formule des probabilités totales que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = 4^{-1} M V_n$.

3. En déduire que $V_n = 4^{-n} M^n V_0$, puis une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

III. Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n (respectivement b_n et c_n) le nombre moyen de passages du pion en A (respectivement en B et en C) entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad A_n \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{si} \quad \overline{A_n} \text{ est réalisé.} \end{cases}$$

1. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ et le nombre $\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_n)$.

2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. En déduire une expression de a_n.

4. En procédant de manière analogue, déterminer une expression de b_n et de c_n.

5. Déterminer un équivalent des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter le résultat.

IV. Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

(i) si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;

(ii) sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de T_B et son espérance.

1. Calculer $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction de A_n et C_n.

3. Établir que $P\left(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{4} P\left(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right)$, puis en déduire que $P\left(B_3 \mid \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Dans la suite, on admet la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(B_{n+1} \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}\right) = \frac{1}{4}.$$

4. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(T_B = k)$. Que vaut $P(T_B = 0)$?

5. Justifier que la variable aléatoire T_B est d'espérance finie. Quelle est l'espérance de T_B ?

Fin